実力をつけるために…

どうしたら自転車が上手に乗れるようになるのだろうか？
補助輪を付けて練習した人もいたでしょう．何度も転んで怪我をして，それでも諦めずに乗り続けることで，上手く乗れるようになりました．自転車に３回しか乗ったことがない人と300回乗ったことがある人ではどちらが上手に乗れるでしょうか．その答は明白です．自転車を上手に乗れるようになる為に，競輪選手のビデオを徹底研究する人がいたとしたら，あなたはどうアドバイスしますか？
そんなものをいくら見て研究しても，実際に自転車に乗ってみないと上手にはならないとアドバイスするでしょう．

受験勉強というのは，数学に限らず，自転車を上手に乗ることに似ています．一流の学者の論文を読んだりしてもいけないわけで，実際に自分のまわりにある問題と実際に格闘してもがいて苦しんではじめて問題が上手に解けるようになるのですね．
ただ，受験勉強の場合は，自転車における補助輪に相当する，参考書や予備校，そして「スタディサプリ」など，これから実力をつけようと考えている受験生にとっての踏み台になるものが沢山あります．
それらを上手に利用して，最後は自分の力で時間の許す限り多くの問題を経験して，制限時間内でちゃんとした解答を書けるようになるまで徹底的に練習することによって，合格がより確実なものになるわけです．

以上のことを意識しながら授業を受けて，自分の及ばない所を少しでもなおしていけば，必ず数学はできるようになるはずです．

最後まで諦めずに頑張りましょう !!

堺　義明

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

高３　スタンダードレベル数学Ⅲ

目　次

第１講	複素数の取り扱い	p.4
第２講	n 乗計算	p.8
第３講	複素数で点を移動	p.12
第４講	分数関数・無理関数	p.16
第５講	2 次曲線	p.20
第６講	数列の極限	p.24
第７講	級数	p.28
第８講	関数の極限 ―その１―	p.32
第９講	関数の極限 ―その２―	p.36
第 10 講	関数の極限 ―その３―	p.40
第 11 講	微分の基本	p.44
第 12 講	微分の計算	p.48
第 13 講	増減表の作成方法	p.52
第 14 講	グラフの描き方	p.56
第 15 講	グラフを詳しく描く為の道具	p.60
第 16 講	最大と最小	p.64
第 17 講	実数解の個数	p.68
第 18 講	接線について	p.72
第 19 講	積分の基本	p.76
第 20 講	部分積分	p.80
第 21 講	置換積分	p.84
第 22 講	面積	p.88
第 23 講	体積（回転体のみ）	p.92
第 24 講	積分で表された関数	p.96

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数の取り扱い

1

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) 実数 a，b に対して，$a+bi=0$ ならば $a=b=0$ であることを示せ．

(2) 実数 a，b，c，d に対して，$a+bi=c+di$ ならば $a=c$ かつ $b=d$ であることを示せ．

(3) $z^2=3+4i$ を満たす複素数 z を求めよ．

［B］ z の２次方程式

$$z^2-2iz-6+12i=0$$

を解け．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数の取り扱い

1　$z^2=5+12i$ を満たす複素数 z を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　n 乗計算

2

［A］　次の各問いに答えよ．ただし，α，β は実数，n は自然数とする．

(1)　$(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ を示せ.

(2)　$\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$ を示せ.

(3)　$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ を示せ.

(4)　$(1+i)^{10}$ を求めよ.

(5)　$\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{100}$ を求めよ.

［B］　$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき

$$1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{2000}$$

の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　n 乗計算

2　$z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ とするとき $1+z^{100}+z^{200}$ の値を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数で点を移動

3

［A］ 次の複素数を複素数平面上に図示せよ．

(1) $z_1=2+i$

(2) $z_2=z_1\times i$

(3) $z_3=z_1\times(1+i)$

(4) $z_4={z_1}^2$

(5) $z_5=z_1\times\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

［B］ O(0)，A$(3+i)$ として，以下の各問いに答えよ．

(1) 3 点 O，A，B がこの順に正三角形の頂点になっているとき，B を表す複素数を求めよ．

(2) 4 点 O，A，P，Q がこの順に正方形の頂点になっているとき，P を表す複素数を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第3講　複素数で点を移動

3　正の実数 a，b に対して $z=a+bi$ とする．
O(0)，A$(3-i)$，B(z) が正三角形の頂点となるとき z を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　分数関数・無理関数

4

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) 曲線 $y=\sqrt{x}$ を図示せよ．

(2) 曲線 $y=\sqrt{x-2}+1$ を図示せよ．

(3) 曲線 $y=\sqrt{-2x+4}$ を図示せよ．

(4) 曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ を図示せよ．

(5) 曲線 $y=\dfrac{2}{x-1}+2$ を図示せよ．

(6) 曲線 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ を図示せよ．

［B］ 不等式 $\sqrt{4x-4}<\dfrac{3x}{x+1}$ を解け．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　分数関数・無理関数

4　方程式 $\sqrt{3-2x}=\dfrac{2x}{x+1}$ を解け.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第5講　2次曲線

5

［A］　直線 l:$x=-2$，A(2，0)，点 B(−2，0) とする．

次の各問いに答えよ．

(1)　P と l の距離と A と P の距離が等しい点 P の軌跡を求めよ．

(2)　AP＋BP＝6 となる点 P の軌跡を求めよ．

(3)　AP−BP＝2 となる点 P の軌跡を求めよ．

［B］　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 $x^2+4y^2-8y=0$ を図示せよ．

(2)　曲線 $x^2-4y^2+8y-8=0$ を図示せよ．

(3)　曲線 $y=\sqrt{9-4x^2}$ を図示せよ．また，$x=1$ における接線の方程式を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次曲線

5　次の２次曲線を図示せよ.

(1)　$4x^2+y^2-2y-3=0$

(2)　$y^2-8x+6y-7=0$

(3)　$x^2-4y^2-6x-16y-32=0$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　数列の極限

6

［A］ 次の極限を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 3^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 0.3^n$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-0.6)^n$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-2)^n$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^0$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-3}$

［B］ 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (3^n-2^n)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (3n^2-2n)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2^n}{4^n+5^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　数列の極限

6　極限 $\lim_{n \to \infty}(\sqrt{n^2+4n+5}-n)$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　級数

7

［A］　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

［B］　半径１の円を C_1 とする．円 C_1 に内接する正三角形を T_1，T_1 の内接円を C_2 とし，以下，自然数 n に対して，円 C_n に内接する正三角形を T_n，T_n の内接円を C_{n+1} と定めることとする．

円 C_n の面積を S_n とするとき，次の各問いに答えよ．

(1) S_2 を求めよ．

(2) S_n を求めよ．

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第7講　級数

7　半径1の円をC_1とする．円C_1に内接する正方形をQ_1，Q_1の内接円をC_2とし，以下，自然数nに対して，円C_nに内接する正方形をQ_n，Q_nの内接円をC_{n+1}と定めることとする．

円C_nの面積をS_nとするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　関数の極限 ―その１―

8

［A］ 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x+1}{x+2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}2^x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(x^3-2x^2)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{2^x+2^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{2}{(x-1)^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{3}{x^2-3x+2}$

［B］ 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}\frac{(x+2)(3x^2+4)}{x^3+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x^2-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+4^x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to \infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　関数の極限 ―その１―

8　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2}{x-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　関数の極限 ―その２―

9

［A］　次の極限を求めよ．

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

（3）　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$

（4）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

（5）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}$

（6）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

［B］　次の極限を求めよ．

（1）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

（2）　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{x}$

（3）　$\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^{x}$

（4）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}$

（5）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$

（6）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

（7）　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^{2}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第９講　関数の極限 ―その２―

9　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\log(1+5x)}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{-x}-1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sin 6x}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　関数の極限 ―その３―

10

［A］ 次の極限を求めよ．

（1） $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x$

（2） $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

（3） $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x}{x^2}$

（4） $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

［B］ 次の極限を求めよ．

ただし，自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}=0$ は用いてもよいこととする．

（1） $\displaystyle\lim_{x\to +0} \frac{\log x}{x}$

（2） $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$

（3） $\displaystyle\lim_{x\to +0} e^{\frac{1}{x}}$

（4） $\displaystyle\lim_{x\to -0} e^{\frac{1}{x}}$

（5） $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　関数の極限 ―その 3―

10　次の極限を求めよ．ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ は用いてもよいこととする．

(1)　$\lim_{x\to 1+0}\dfrac{e^x}{x-1}$

(2)　$\lim_{x\to 1-0}\dfrac{e^x}{x-1}$

(3)　$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x-1}{e^x}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　微分の基本

11

［A］ $f'(x)$ を求めよ．ただし，α は実数の定数とする．

(1) $f(x)=e^x$

(2) $f(x)=\sin x+\cos x+\tan x$

(3) $f(x)=x^\alpha+\log x^3$

(4) $f(x)=(x+1)^4$

［B］ $f'(x)$ を求めよ．

(1) $f(x)=x^3\cos x$

(2) $f(x)=e^x\sin x$

(3) $f(x)=x^2\log x$

(4) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$

(5) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^3}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　微分の基本

11　$f'(x)$ を求めよ．

（1）　$f(x)=e^x\cos x$

（2）　$f(x)=\dfrac{x^2}{\log x}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第12講　微分の計算

12

［A］ $f'(x)$ を求めよ．

(1) $f(x)=(2x+1)^{10}$

(2) $f(x)=e^{3x+1}$

(3) $f(x)=\sin 3x$

(4) $f(x)=\cos(4x+1)+\tan(5x+6)$

(5) $f(x)=\log|2x+3|$

［B］ $f'(x)$ を求めよ．

(1) $f(x)=e^{x^2}$

(2) $f(x)=(x^2+1)^3(x^2+x+1)^4$

(3) $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

(4) $f(x)=\log\sqrt{x^2+1}$

(5) $f(x)=\dfrac{\sin 4x}{e^{3x}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　微分の計算

12　$f'(x)$ を求めよ.

(1)　$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$

(2)　$f(x)=e^{-2x}\sin 2x$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　増減表の作成方法

13

［A］　$f(x)=e^{-x}\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ に関して，次の各問いに答えよ．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　$f'(x)>0$ となる x の値の範囲を求めよ．

(3)　$f'(x)=0$ となる x の値を求めよ．

(4)　$f'(x)=0$ となる x の値に対し，$f(x)$ の値をそれぞれ求めよ．

(5)　与えられた区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ の両端での $f(x)$ の値をそれぞれ求めよ．

(6)　$f(x)$ の増減表を作成せよ．

［B］　$f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ に関して，次の各問いに答えよ．

(1)　$f'(x)$ を求めよ．

(2)　$f'(x)>0$ となる x の値の範囲を求めよ．

(3)　$f'(x)=0$ となる x の値を求めよ．

(4)　$f'(x)=0$ となる x の値に対し，$f(x)$の値をそれぞれ求めよ．

(5)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(6)　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to1+0}f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(7)　$f(x)$ の増減表を作成せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　増減表の作成方法

13　$f(x)=\dfrac{-x+1}{(x-2)^3}$ の増減表を作成せよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　グラフの描き方

14

［A］ $f(x)=x^2e^{-x}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け．ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ は証明せずに用いてよい．

［B］ $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 3)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　グラフの描き方

14　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\dfrac{\log x}{x}=0$ は証明せずに用いてよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　グラフを詳しく描く為の道具

15

［A］ $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ とする．$y=f(x)$ の凹凸，漸近線などを調べ，$y=f(x)$ のグラフを描け．

［B］ $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x>0)$ とする．$y=f(x)$ の変曲点などを調べ，$y=f(x)$ のグラフを描け．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$ は証明せずに用いてよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　グラフを詳しく描く為の道具

15　$f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ とする．$y=f(x)$ の凹凸，漸近線などを調べ，$y=f(x)$ のグラフを描け．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　最大と最小

16

［A］ $f(\theta)=3\sin\theta+\sin 3\theta$ とする.

$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f(\theta)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.

［B］ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}x$ とする.

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　最大と最小

16　$f(x)=x^2-4\log(x^2+2x+2)$ とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　実数解の個数

17

［A］ k を実数の定数とするとき，x の方程式

$$x^3+x^2-kx-(k+4)=0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

［B］ a を実数の定数とするとき，x の方程式

$$x+1=ae^x$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

ただし，$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ は証明せずに用いてもよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　実数解の個数

17　a を実数の定数とするとき，x の方程式

$$\log x = a\sqrt{x}\ \ (x>0)$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は証明せずに用いてもよい．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　接線について

18

［A］ 次の各問いに答えよ.

(1) 曲線 $y=\sin x$ の $x=\dfrac{\pi}{3}$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 曲線 $y=\log x$ の $x=1$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線と x 軸の交点の座標を求めよ.

［B］ 曲線 $y=xe^{-x}$ の接線で点 $\left(0,\ \dfrac{4}{e^2}\right)$ を通るものは何本あるか求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第18講　接線について

18　曲線 $y=\dfrac{e^x}{x}$ の接線で点 $(0,\ 0)$ を通るものをすべて求めよ.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　積分の基本

19

［A］　不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x+\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx$

(2) $\displaystyle\int(\sin 2x+\cos 3x)dx$

(3) $\displaystyle\int(e^x+1)^2dx$

(4) $\displaystyle\int(2x+1)^{10}dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

［B］　定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^\pi\sin 3x\cos 2x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2(x-1)^4(x+1)dx$

(4) $\displaystyle\int_0^\pi\sin^2 2x\,dx$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　積分の基本

19　定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2 dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2 dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 4x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2\frac{(x^2+1)^2}{x}dx$

(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan x}dx$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　部分積分

20

［A］　不定積分を求めよ．ただし，積分定数は C を用いよ．

（1）$\displaystyle\int xe^x\,dx$

（2）$\displaystyle\int x\sin x\,dx$

（3）$\displaystyle\int x\cos x\,dx$

（4）$\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

［B］　定積分を求めよ．

（1）$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 3x\,dx$

（2）$\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$

（3）$\displaystyle\int_0^{\pi} (x+\sin x)^2\,dx$

（4）$\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　部分積分

20　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}(x+\cos x)^2\,dx$ を求めよ.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　置換積分

21

［A］　定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$

［B］　定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 21 講　置換積分

21　定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　面積

22

［A］　2つの曲線 $y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=\sin 2x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ により囲まれる部分の面積 S を求めよ．

［B］　$C：y=\log x$ とする．$x=e^3$ における C の接線を l とするとき，C と l，x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　面積

22　$C：y=e^x$ とする．$x=2$ における C の接線を l とするとき，C と l，x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積 S を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　体積（回転体のみ）

23

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $y=x^2-2x$ と x 軸によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) $y=\tan x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$ と x 軸によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(3) $y=\log x$ と x 軸，y 軸，そして直線 $y=2$ によって囲まれる部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

［B］ 次の各問いに答えよ．

(1) 2つの曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=\sin 2x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ によって囲まれる部分を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) $C：y=\log x$ とする．$x=e$ における C の接線を l とするとき，C と l，x 軸によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 23 講　体積（回転体のみ）

23　$C：y=e^x$ とする．$x=1$ における C の接線を l とするとき，C と l と y 軸によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　積分で表された関数

24

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=x+\int_0^1 e^t f(t)\,dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $\int_a^x f(t)\,dt=\sin x$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．ただし，$3<a<4$ とする．

［B］ $f(x)=\int_x^{2x} \log t\,dt\ (x>0)$ とするとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を最小にする x の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　積分で表された関数

24　a を 0 でない実数の定数とする．

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 + x\int_0^1 e^t f(t)dt$$

を満たす関数 $f(x)$ と a の値を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第1講　複素数の取り扱い

1

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) 実数 a，b に対して，$a+bi=0$ ならば $a=b=0$ であることを示せ．

(2) 実数 a，b，c，d に対して，$a+bi=c+di$ ならば $a=c$ かつ $b=d$ であることを示せ．

(3) $z^2=3+4i$ を満たす複素数 z を求めよ．

［B］ z の2次方程式

$$z^2-2iz-6+12i=0$$

を解け．

【答】 ［A］ (1) 略　(2) 略　(3) $z=\pm(2+i)$

［B］ $z=3-i, -3+3i$

【解説】

［A］ (1) $a+bi=0$ より $a=-bi$ なので，この両辺を2乗すると $a^2=-b^2$ となる．

ここで a，b は実数なので，$a^2\geqq 0$，$b^2\geqq 0$ つまり $-b^2\leqq 0$ となるが，$a^2=-b^2$ が成立するものは $a^2=0$ かつ $-b^2=0$ つまり $a=b=0$ に限る．

よって $a+bi=0$ ならば $a=b=0$ である．

(2) $a+bi=c+di$ より $(a-c)+(b-d)i=0$ である．

ここで，a，b，c，d は実数より，$a-c$ と $b-d$ も実数となるので，(1)の結果より $a-c=b-d=0$ つまり $a=c$ かつ $b=d$ である．

(3) p と q を実数として $z=p+qi$ とおくと，$z^2=(p+qi)^2=(p^2-q^2)+2pqi$ となるので，

$$z^2=3+4i \iff (p^2-q^2)+2pqi=3+4i$$

である．

ここで p，qは実数なので，p^2-q^2と$2pq$も実数となるので

$$p^2-q^2=3 \quad \cdots\cdots ①,\quad 2pq=4 \quad \cdots\cdots ②$$

が成り立つ．

②より $pq=2(\neq 0)$ より $p\neq 0$ だから，② $\iff$ $q=\dfrac{2}{p}$ とできるので，これを①に代入すると

$$\begin{aligned} ① \quad &\iff \quad p^2-\frac{4}{p^2}=3 \\ &\iff \quad p^4-3p^2-4=0 \\ &\iff \quad (p^2+1)(p-2)(p+2)=0 \end{aligned}$$

p は実数なので，$p=\pm 2$.

$p=2$ のとき，$q=1$，$p=-2$ のとき，$q=-1$ だから，求める複素数は $\boldsymbol{z=\pm(2+i)}$.

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ $z^2-2iz-6+12i=(z-i)^2-5+12i=0$ より $(z-i)^2=5-12i$

ここで $(3-2i)^2=5-12i$ より

$$z-i=\pm(3-2i) \qquad \therefore \quad z=i\pm(3-2i)$$

よって $\boldsymbol{z=3-i,\ -3+3i}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第2講　n 乗計算

2

［A］ 次の各問いに答えよ．ただし，α，β は実数，n は自然数とする．

(1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$ を示せ．

(2) $\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$ を示せ．

(3) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ を示せ．

(4) $(1+i)^{10}$ を求めよ．

(5) $\left(\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{100}$ を求めよ．

［B］ $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とするとき

$$1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{2000}$$

の値を求めよ．

【答】 ［A］ (1) 略　(2) 略　(3) 略　(4) $32i$　(5) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

［B］ 0

【解説】 ［A］ (1) $(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$

$$=\cos\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta+i\sin\alpha\cos\beta+i^2\sin\alpha\sin\beta$$
$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)+i(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

(2)
$$\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha}{\cos\beta+i\sin\beta}\times\frac{\cos\beta-i\sin\beta}{\cos\beta-i\sin\beta}$$
$$=\frac{(\cos\alpha+i\sin\alpha)\{\cos(-\beta)+i\sin(-\beta)\}}{\cos^2\beta+\sin^2\beta}$$
$$=\frac{\cos\{\alpha+(-\beta)\}+i\sin\{\alpha+(-\beta)\}}{1}$$
$$=\cos(\alpha-\beta)+i\sin(\alpha-\beta)$$

(3) $n=1$ のとき，(左辺)$=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^1$，(右辺)$=\cos 1\alpha+i\sin 1\alpha$ より (左辺)=(右辺) である．

ここで $n=k(\geqq1)$ のとき $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^k=\cos k\alpha+i\sin k\alpha$ が成り立つと仮定すると，

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^{k+1}=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^k\times(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=(\cos k\alpha+i\sin k\alpha)\times(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$=\cos(k\alpha+\alpha)+i\sin(k\alpha+\alpha)$$
$$=\cos(k+1)\alpha+i\sin(k+1)\alpha$$

となり，$n=k+1$ のときにも与式は成立する．

よって数学的帰納法により $(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$ は示された．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)

$$(1+i)^{10}=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{10}$$

$$=(\sqrt{2})^{10}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}$$

$$=2^5\left(\cos\frac{10\pi}{4}+i\sin\frac{10\pi}{4}\right)$$

$$=32\times i=\boldsymbol{32i}$$

(5)

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}\right)^{100}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{100}$$

$$=\cos\frac{100\pi}{3}+i\sin\frac{100\pi}{3}$$

$$=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$$

$$=\boldsymbol{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

［B］　$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}\neq 1$ より $1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{2000}=\dfrac{1-z^{2001}}{1-z}$ と変形できる.

ここで $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$ より

$z^{2001}=\cos\dfrac{4002}{3}\pi+i\sin\dfrac{4002}{3}\pi=\cos 1334\pi+i\sin 1334\pi=1$ を得るので

$\dfrac{1-z^{2001}}{1-z}=0$ となる.

よって $1+z+z^2+z^3+\cdots\cdots+z^{2000}=\mathbf{0}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数で点を移動

3

［A］ 次の複素数を複素数平面上に図示せよ．

(1) $z_1=2+i$

(2) $z_2=z_1\times i$

(3) $z_3=z_1\times(1+i)$

(4) $z_4={z_1}^2$

(5) $z_5=z_1\times\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}$

［B］ $\mathrm{O}(0)$，$\mathrm{A}(3+i)$ として，以下の各問いに答えよ．

(1) 3 点 O，A，B がこの順に正三角形の頂点になっているとき，B を表す複素数を求めよ．

(2) 4 点 O，A，P，Q がこの順に正方形の頂点になっているとき，P を表す複素数を求めよ．

【答】 ［A］ 略　［B］ (1) $\dfrac{3-\sqrt{3}+(1+3\sqrt{3})i}{2}$，$\dfrac{3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i}{2}$

(2) $2+4i$，$4-2i$

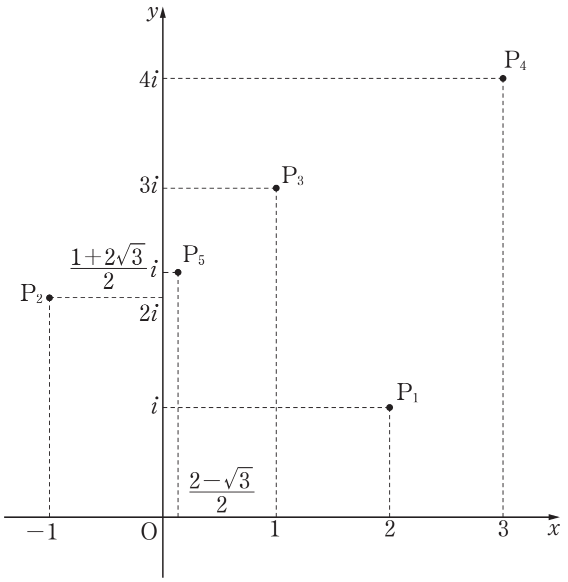
【解説】 ［A］ $\mathrm{P}_i(z_i)\,(i=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ とする．

$z_2=z_1\times i=(2+i)i=2i+i^2=-1+2i$,

$z_3=z_1\times(1+i)=(2+i)(1+i)=2+3i+i^2=1+3i$,

$z_4={z_1}^2=(2+i)^2=4+4i+i^2=3+4i$,

$z_5=z_1\times\dfrac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{(2+i)(1+\sqrt{3}\,i)}{2}=\dfrac{2-\sqrt{3}+(1+2\sqrt{3})i}{2}$ より，下図のようになる．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1)　求める複素数を z とすると，OA＝OB かつ $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ なので，

$$z=(3+i)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=(3+i)\times\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\boldsymbol{\frac{3-\sqrt{3}+(1+3\sqrt{3})i}{2}},$$

または

$$z=(3+i)\left\{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right\}=(3+i)\times\frac{1-\sqrt{3}\,i}{2}=\boldsymbol{\frac{3+\sqrt{3}+(1-3\sqrt{3})i}{2}}$$

(2)　Q(z) とすると，P を表す複素数は $z+(3+i)$ であり，OA＝OQ かつ $\angle\mathrm{AOQ}=\dfrac{\pi}{2}$ なので，

$$z=(3+i)\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=(3+i)i=-1+3i,$$

または $z=(3+i)\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right\}=(3+i)(-i)=1-3i$

となるので，求める複素数は $z+(3+i)=\boldsymbol{2+4i,\ 4-2i}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　分数関数・無理関数

4

［A］　次の各問いに答えよ.

（1）　曲線 $y=\sqrt{x}$ を図示せよ.

（2）　曲線 $y=\sqrt{x-2}+1$ を図示せよ.

（3）　曲線 $y=\sqrt{-2x+4}$ を図示せよ.

（4）　曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ を図示せよ.

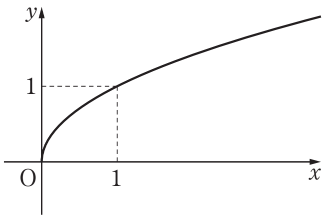
（5）　曲線 $y=\dfrac{2}{x-1}+2$ を図示せよ.

（6）　曲線 $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ を図示せよ.

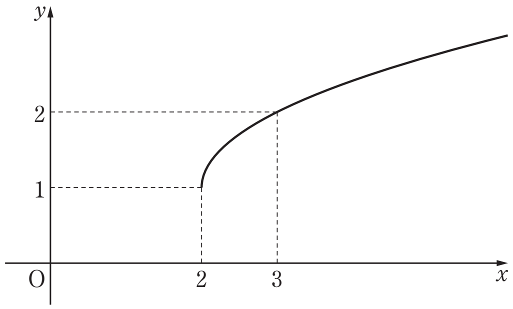
［B］　不等式 $\sqrt{4x-4}<\dfrac{3x}{x+1}$ を解け.

【答】　［A］　略　［B］　$1\leqq x<2$

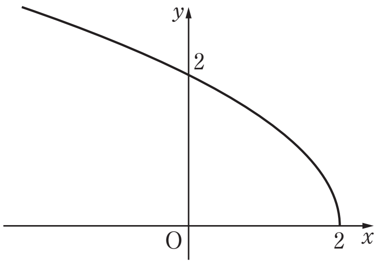
【解説】　［A］（1）



（2）

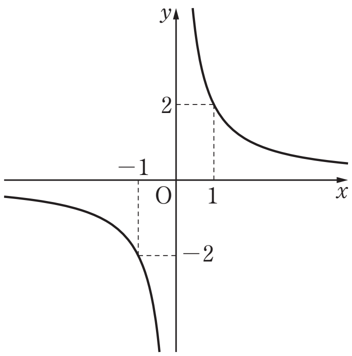


（3）

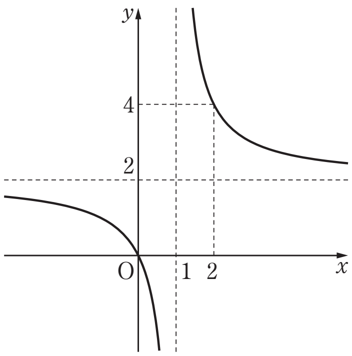


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

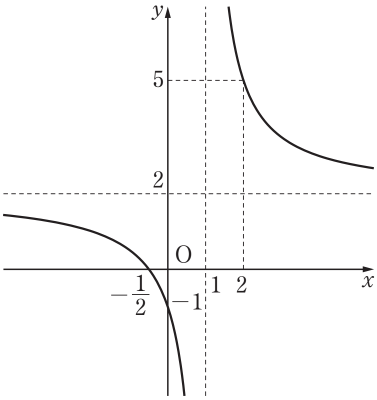
(4)



(5)



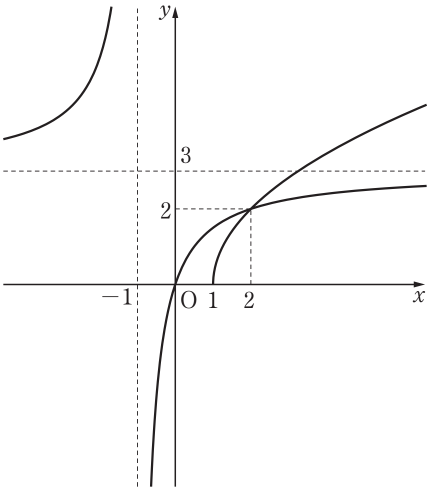
(6)　$y=2+\dfrac{3}{x-1}$ より



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］　$y=\sqrt{4x-4}=2\sqrt{x-1}$ と $y=\dfrac{3x}{x+1}=3-\dfrac{3}{x+1}$ のグラフより $\boldsymbol{1 \leqq x < 2}$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次曲線

5

［A］　直線 $l:x=-2$，A$(2,\ 0)$，点 B$(-2,\ 0)$ とする．

次の各問いに答えよ．

(1)　P と l の距離と A と P の距離が等しい点 P の軌跡を求めよ．

(2)　AP＋BP＝6 となる点 P の軌跡を求めよ．

(3)　AP－BP＝2 となる点 P の軌跡を求めよ．

［B］　次の各問いに答えよ．

(1)　曲線 $x^2+4y^2-8y=0$ を図示せよ．

(2)　曲線 $x^2-4y^2+8y-8=0$ を図示せよ．

(3)　曲線 $y=\sqrt{9-4x^2}$ を図示せよ．また，$x=1$ における接線の方程式を求めよ．

【答】［A］(1) $y^2=8x$　(2) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$　(3) $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\,(x<0)$

［B］(1) 略　(2) 略　(3) $4x+\sqrt{5}\,y=9$

【解説】［A］(1)　P$(X,\ Y)$ とおき，H$(-2,\ Y)$ とすると，P と l の距離は

$$\mathrm{PH}=|X-(-2)|=|X+2|$$

なので

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}=\mathrm{PH}\iff&\sqrt{(X-2)^2+Y^2}=|X+2|\\ \iff&(X-2)^2+Y^2=(X+2)^2\\ \iff&Y^2=8X\end{aligned}$$

となるから，求める軌跡は $\boldsymbol{y^2=8x}$

(2)　P$(X,\ Y)$ とおくと

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=6\iff&\sqrt{(X-2)^2+Y^2}+\sqrt{(X+2)^2+Y^2}=6\\ \iff&\sqrt{(X-2)^2+Y^2}=6-\sqrt{(X+2)^2+Y^2}\\ \iff&(X-2)^2+Y^2=\{6-\sqrt{(X+2)^2+Y^2}\}^2\text{ かつ }6-\sqrt{(X+2)^2+Y^2}\geqq0\\ \iff&(X-2)^2+Y^2=36-12\sqrt{(X+2)^2+Y^2}+(X+2)^2+Y^2\text{ かつ }\sqrt{(X+2)^2+Y^2}\leqq6\\ \iff&3\sqrt{(X+2)^2+Y^2}=9+2X\text{ かつ }(X+2)^2+Y^2\leqq36\\ \iff&9\{(X+2)^2+Y^2\}=(9+2X)^2\text{ かつ }9+2X\geqq0\text{ かつ }(X+2)^2+Y^2\leqq36\\ \iff&\frac{X^2}{9}+\frac{Y^2}{5}=1\text{ かつ }X\geqq-\frac{9}{2}\text{ かつ }(X+2)^2+Y^2\leqq36\end{aligned}$$

となるから，求める軌跡は $\boldsymbol{\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1}$

©RECRUIT HOLDINGS

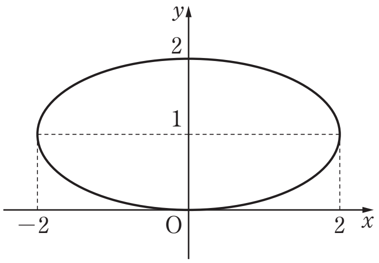
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくと

$$\mathrm{AP}-\mathrm{BP}=2 \iff \sqrt{(X-2)^2+Y^2}-\sqrt{(X+2)^2+Y^2}=2$$
$$\iff \sqrt{(X-2)^2+Y^2}=2+\sqrt{(X+2)^2+Y^2}$$
$$\iff (X-2)^2+Y^2=\{2+\sqrt{(X+2)^2+Y^2}\}^2$$
$$\iff (X-2)^2+Y^2=4+4\sqrt{(X+2)^2+Y^2}+(X+2)^2+Y^2$$
$$\iff \sqrt{(X+2)^2+Y^2}=-2X-1$$
$$\iff (X+2)^2+Y^2=(-2X-1)^2 \text{ かつ } -2X-1\geqq 0$$
$$\iff X^2-\frac{Y^2}{3}=1 \text{ かつ } X\leqq -\frac{1}{2}$$

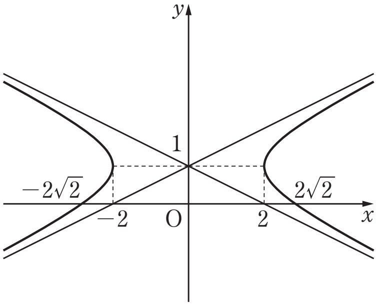
となるから，求める軌跡は $\boldsymbol{x^2-\dfrac{y^2}{3}=1\ (x<0)}$

［B］(1)　$x^2+4y^2-8y=0 \iff \dfrac{x^2}{4}+(y-1)^2=1$ で焦点は$(\pm\sqrt{3},\ 1)$ などより



(2)　$x^2-4y^2+8y-8=0 \iff \dfrac{x^2}{4}-(y-1)^2=1$ で焦点は $(\pm\sqrt{5},\ 1)$，漸近線は

$y=\pm\dfrac{1}{2}x+1$ などより

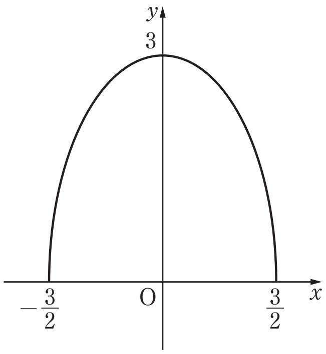


ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$y=\sqrt{9-4x^2} \iff y^2=9-4x^2$ かつ $y \geqq 0 \iff \dfrac{4x^2}{9}+\dfrac{y^2}{9}=1$ かつ $y \geqq 0$ となり，

焦点は$\left(0,\ \pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\right)$などよりグラフは下図.



また $x=1$ のとき $y=\sqrt{5}$ なので，求める接線の方程式は $\dfrac{4\cdot 1}{9}x+\dfrac{\sqrt{5}}{9}y=1$ ゆえに

$\boldsymbol{4x+\sqrt{5}\,y=9}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第６講　数列の極限

6

［A］　次の極限を求めよ．ただし，n は自然数とする．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 3^n$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1^n$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 0.3^n$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-0.6)^n$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n$

(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-2)^n$

(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2$

(8) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^0$

(9) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-3}$

［B］　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (3^n-2^n)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (3n^2-2n)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n+2^n}{4^n+5^n}$

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{\sqrt{n^2+1}}$

(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n+1}}$

【答】　［A］ (1) ∞　(2) 1　(3) 0　(4) 0　(5) 振動　(6) 振動　(7) ∞　(8) 1　(9) 0

［B］ (1) ∞　(2) ∞　(3) 0　(4) 3　(5) 2

【解説】　［A］ (1)　$3>1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 3^n=\infty$

(2)　$1^n=1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 1^n=\mathbf{1}$

(3)　$-1<0.3<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} 0.3^n=\mathbf{0}$

(4)　$-1<-0.6<1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-0.6)^n=\mathbf{0}$

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ は**振動**する．

(6)　$-2<-1$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (-2)^n$ は**振動**する．

(7)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2=\infty$

(8)　$n^0=1$より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^0=\mathbf{1}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(9)　$n^{-3}=\dfrac{1}{n^3}$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^{-3}=\mathbf{0}$

［B］　(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3^n-2^n)=\lim_{n\to\infty}3^n\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}=\infty$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(3n^2-2n)=\lim_{n\to\infty}n^2\left(3-\frac{2}{n}\right)=\infty$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3^n+2^n}{4^n+5^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n\cdot\frac{1+\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{4}{5}\right)^n+1}=\mathbf{0}$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{\sqrt{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\mathbf{3}$

(5)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-n+1}}{n}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\right)=\mathbf{2}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　級数

7

［A］　次の無限級数の収束，発散を調べ，収束するときにはその極限値を求めよ．

(1)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$

［B］　半径１の円を C_1 とする．円 C_1 に内接する正三角形を T_1，T_1 の内接円を C_2 とし，以下，自然数 n に対して，円 C_n に内接する正三角形を T_n，T_n の内接円を C_{n+1} と定めることとする．

　円 C_n の面積を S_n とするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　S_2 を求めよ．

(2)　S_n を求めよ．

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求めよ．

【答】［A］(1) 発散　(2) $\dfrac{1}{2}$　(3) 発散　(4) $\dfrac{3}{4}$

［B］(1) $\dfrac{\pi}{4}$　(2) $\dfrac{\pi}{4^{n-1}}$　(3) $\dfrac{4\pi}{3}$

【解説】［A］(1)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n}$ は**発散**する．

(2)　$-1<\dfrac{1}{3}<1$ より $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ は $\dfrac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$ に収束する．

(3)
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k+1}{k}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}\\&=\lim_{n\to\infty}\log(n+1)\\&=\infty\end{aligned}$$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n+1}{n}$ は**発散**する．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$

$\displaystyle=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)$

$\displaystyle=\frac{3}{4}$

よって $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$ は $\boldsymbol{\frac{3}{4}}$ に収束する.

［B］ (1) 半径 R の円に内接する正三角形の一辺の長さを a とすると，正弦定理より

$\dfrac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}=2R.$

つまり $R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$ を得る.

次に，一辺の長さが a の正三角形の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ なので，その正三角形に内接する円の半径を r とすると

$\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2=\dfrac{r}{2}\times 3a.$ つまり $a=2\sqrt{3}\,r$ を得る.

よって $R=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot 2\sqrt{3}\,r$ より $r=\dfrac{1}{2}R$ となる.

ここで C_1 の半径は 1 なので，C_2 の半径は $\dfrac{1}{2}$ となるので，$S_2=\pi\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$ ゆえに $S_2=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4}}$

(2) (1)より C_n の半径は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となるので，$S_n=\pi\cdot\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2$ ゆえに $S_n=\boldsymbol{\dfrac{\pi}{4^{n-1}}}$

(3) (2)の結果より $\{S_n\}$ は初項 $S_1=\pi$，公比 $\dfrac{1}{4}$ の等比数列となり，$-1<\dfrac{1}{4}<1$ なので

$$\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{\pi}{1-\frac{1}{4}}=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　関数の極限 ―その１―

8

［A］　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2)$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+2^{-x}}{3^x+3^{-x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2}{(x-1)^2}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{3}{x^2-3x+2}$

［B］　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(3x^2+4)}{x^3+1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+4^x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)$

【答】　［A］ (1) $\dfrac{3}{4}$　(2) 0　(3) ∞　(4) 0　(5) ∞　(6) 極限無し

［B］ (1) 4　(2) 3　(3) -1　(4) ∞　(5) $\dfrac{1}{2}$

【解説】　［A］ (1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2+1}{2+2}=\boldsymbol{\frac{3}{4}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}2^x=\mathbf{0}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x^3-2x^2)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{2}{x}\right)=\boldsymbol{\infty}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+2^{-x}}{3^x+3^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{1+4^{-x}}{1+9^{-x}}=\mathbf{0}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2}{(x-1)^2}=\boldsymbol{\infty}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to2-0}\frac{3}{x^2-3x+2}=-\infty$, $\displaystyle\lim_{x\to2+0}\frac{3}{x^2-3x+2}=\infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{3}{x^2-3x+2}$ は**極限無し**．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1) $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to2}(x+2)=\mathbf{4}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)(3x^2+4)}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(3+\frac{4}{x^2}\right)}{1+\frac{1}{x^3}}=\mathbf{3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{0+1}{0-1}=\mathbf{-1}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{2^x+3^x}{3^x+4^x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^x}=\infty$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1}=\mathbf{\frac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　関数の極限 ―その2―

9

［A］　次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

［B］　次の極限を求めよ.

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

【答】　［A］ (1) e　(2) e　(3) e　(4) 1　(5) 1　(6) 1

［B］ (1) e^2　(2) $e^{\frac{1}{3}}$　(3) e^4　(4) 2　(5) $\dfrac{3}{2}$　(6) 4　(7) $\dfrac{1}{2}$

【解説】　［A］ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\boldsymbol{e}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\boldsymbol{e}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\boldsymbol{e}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=\mathbf{1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\mathbf{1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\mathbf{1}$

［B］ (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right\}^2=\boldsymbol{e^2}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{3x}\right)^{3x}\right\}^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{e^{\frac{1}{3}}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)^x=\lim_{x\to-\infty}\left\{\left(1+\frac{4}{x}\right)^{\frac{x}{4}}\right\}^4=\boldsymbol{e^4}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+2x)}{2x}\times 2=\mathbf{2}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{3}{2}=\mathbf{\frac{3}{2}}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}\times 4=\mathbf{4}$

(7) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}\times\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\mathbf{\frac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　関数の極限 ―その３―

10

［A］ 次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$

［B］ 次の極限を求めよ．

ただし，自然数 n に対して $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ は用いてもよいこととする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\log x}{x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x}$

【答】 ［A］ (1) 0　(2) ∞　(3) ∞　(4) -1

［B］ (1) $-\infty$　(2) 0　(3) ∞　(4) 0　(5) 0

【解説】 ［A］ (1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}|e^{-x}\sin x| \leqq \lim_{x\to\infty} e^{-x}=0$ より $\displaystyle\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sin x=\mathbf{0}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to0} \frac{e^x}{x^2}=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\left(-1+\frac{2e^x}{e^x+e^{-x}}\right)=\mathbf{-1}$

［B］ (1) $\displaystyle\lim_{x\to+0} \frac{\log x}{x}=-\infty$

(2) $x=e^t$ とおくと，$x\to\infty$ のとき $t\to\infty$ であり，$\log x=t$ なので $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=\lim_{t\to\infty}\frac{t}{e^t}=\mathbf{0}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to+0} e^{\frac{1}{x}}=\infty$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to-0} e^{\frac{1}{x}}=\mathbf{0}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x-1)^2}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2=\mathbf{0}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　微分の基本

11

［A］ $f'(x)$ を求めよ．ただし，α は実数の定数とする．

(1) $f(x)=e^x$

(2) $f(x)=\sin x+\cos x+\tan x$

(3) $f(x)=x^\alpha+\log x^3$

(4) $f(x)=(x+1)^4$

［B］ $f'(x)$ を求めよ．

(1) $f(x)=x^3\cos x$

(2) $f(x)=e^x\sin x$

(3) $f(x)=x^2\log x$

(4) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$

(5) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^3}$

【答】 ［A］ (1) e^x　(2) $\cos x-\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}$　(3) $\alpha x^{\alpha-1}+\dfrac{3}{x}$　(4) $4(x+1)^3$

［B］ (1) $x^2(3\cos x-x\sin x)$　(2) $\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$　(3) $x(2\log x+1)$　(4) $\dfrac{1-\log x}{x^2}$

(5) $\dfrac{(x-3)e^x}{x^4}$

【解説】 ［A］ (1) $f'(x)=\boldsymbol{e^x}$

(2) $f'(x)=\boldsymbol{\cos x-\sin x+\dfrac{1}{\cos^2 x}}$

(3) $f(x)=x^\alpha+\log x^3=x^\alpha+3\log x$ より $f'(x)=\boldsymbol{\alpha x^{\alpha-1}+\dfrac{3}{x}}$

(4) $f'(x)=\boldsymbol{4(x+1)^3}$

［B］ (1) $f'(x)=3x^2\cos x+x^3(-\sin x)=\boldsymbol{x^2(3\cos x-x\sin x)}$

(2) $f'(x)=e^x\sin x+e^x\cos x=e^x(\sin x+\cos x)=\boldsymbol{\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}$

(3) $f'(x)=2x\log x+x^2\cdot\dfrac{1}{x}=\boldsymbol{x(2\log x+1)}$

(4) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\boldsymbol{\dfrac{1-\log x}{x^2}}$

(5) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^3}=x^{-3}e^x$ より $f'(x)=-3x^{-4}e^x+x^{-3}e^x=\boldsymbol{\dfrac{(x-3)e^x}{x^4}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　微分の計算

12

［A］　$f'(x)$ を求めよ．

（1）　$f(x)=(2x+1)^{10}$

（2）　$f(x)=e^{3x+1}$

（3）　$f(x)=\sin 3x$

（4）　$f(x)=\cos(4x+1)+\tan(5x+6)$

（5）　$f(x)=\log|2x+3|$

［B］　$f'(x)$ を求めよ．

（1）　$f(x)=e^{x^2}$

（2）　$f(x)=(x^2+1)^3(x^2+x+1)^4$

（3）　$f(x)=\sqrt{x^2+1}$

（4）　$f(x)=\log\sqrt{x^2+1}$

（5）　$f(x)=\dfrac{\sin 4x}{e^{3x}}$

【答】　［A］　（1）$20(2x+1)^9$　（2）$3e^{3x+1}$　（3）$3\cos 3x$　（4）$-4\sin(4x+1)+\dfrac{5}{\cos^2(5x+6)}$

（5）$\dfrac{2}{2x+3}$

［B］　（1）$2xe^{x^2}$　（2）$2(x^2+1)^2(x^2+x+1)^3(7x^3+5x^2+7x+2)$　（3）$\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$　（4）$\dfrac{x}{x^2+1}$

（5）$e^{-3x}(4\cos 4x-3\sin 4x)$

【解説】　［A］　（1）　$f'(x)=10(2x+1)^9\cdot(2x+1)'=\mathbf{20(2x+1)^9}$

（2）　$f'(x)=e^{3x+1}\cdot(3x+1)'=\mathbf{3e^{3x+1}}$

（3）　$f'(x)=(\cos 3x)\cdot(3x)'=\mathbf{3\cos 3x}$

（4）　$f'(x)=\{-\sin(4x+1)\}\cdot(4x+1)'+\dfrac{1}{\cos^2(5x+6)}\cdot(5x+6)'$

$$=-4\sin(4x+1)+\frac{5}{\cos^2(5x+6)}$$

（5）　$f'(x)=\dfrac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)'=\dfrac{2}{2x+3}$

［B］　（1）　$f'(x)=e^{x^2}\cdot(x^2)'=\mathbf{2xe^{x^2}}$

（2）　$f'(x)=3(x^2+1)^2\cdot(x^2+1)'\times(x^2+x+1)^4+(x^2+1)^3\times 4(x^2+x+1)^3\cdot(x^2+x+1)'$

$$=2(x^2+1)^2(x^2+x+1)^3(7x^3+5x^2+7x+2)$$

（3）　$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

（4）　$f(x)=\log\sqrt{x^2+1}=\dfrac{1}{2}\log(x^2+1)$ より $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=\dfrac{x}{x^2+1}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(5)　$f(x)=\dfrac{\sin 4x}{e^{3x}}=e^{-3x}\sin 4x$ より

$f'(x)=e^{-3x}\cdot(-3x)'\times\sin 4x+e^{-3x}\times(\cos 4x)\cdot(4x)'=\boldsymbol{e^{-3x}(4\cos 4x-3\sin 4x)}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 13 講　増減表の作成方法

13

［A］ $f(x)=e^{-x}\sin x\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ に関して，次の各問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)>0$ となる x の値の範囲を求めよ．

(3) $f'(x)=0$ となる x の値を求めよ．

(4) $f'(x)=0$ となる x の値に対し，$f(x)$ の値をそれぞれ求めよ．

(5) 与えられた区間 $0\leqq x\leqq 2\pi$ の両端での $f(x)$ の値をそれぞれ求めよ．

(6) $f(x)$ の増減表を作成せよ．

［B］ $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ に関して，次の各問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f'(x)>0$ となる x の値の範囲を求めよ．

(3) $f'(x)=0$ となる x の値を求めよ．

(4) $f'(x)=0$ となる x の値に対し，$f(x)$ の値をそれぞれ求めよ．

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ と $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(6) $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)$ と $\lim\limits_{x\to1+0}f(x)$ をそれぞれ求めよ．

(7) $f(x)$ の増減表を作成せよ．

【答】 ［A］ (1) $\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$ (2) $0\leqq x<\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi<x\leqq 2\pi$ (3) $x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{5}{4}\pi$

(4) $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}$，$f\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)=-\dfrac{1}{e^{\frac{5}{4}\pi}\sqrt{2}}$ (5) $f(0)=0$，$f(2\pi)=0$ (6) 略

［B］ (1) $\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$ (2) $x<-1$，$x>3$ (3) $x=-1$，3 (4) $f(-1)=-2$，$f(3)=6$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ (6) $\lim\limits_{x\to1-0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to1+0}f(x)=\infty$ (7) 略

【解説】 ［A］ (1) $f'(x)=e^{-x}\cdot(-x)'\times\sin x+e^{-x}\times\cos x=e^{-x}(-\sin x+\cos x)$

$=\boldsymbol{\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)}$

(2) $f'(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)>0$ より $\dfrac{3}{4}\pi\leqq x+\dfrac{3}{4}\pi<\pi$，$2\pi<x+\dfrac{3}{4}\pi\leqq\dfrac{11}{4}\pi$

よって $\boldsymbol{0\leqq x<\dfrac{\pi}{4}}$，$\boldsymbol{\dfrac{5}{4}\pi<x\leqq 2\pi}$

(3) $f'(x)=\sqrt{2}\,e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)=0$ より，(2)と同様に考えて $\boldsymbol{x=\dfrac{\pi}{4}}$，$\boldsymbol{\dfrac{5}{4}\pi}$

(4) $\boldsymbol{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}=e^{-\frac{\pi}{4}}\sin\dfrac{\pi}{4}=\boldsymbol{\dfrac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}}$ ，$\boldsymbol{f\left(\dfrac{5}{4}\pi\right)}=e^{-\frac{5}{4}\pi}\sin\dfrac{5}{4}\pi=\boldsymbol{-\dfrac{1}{e^{\frac{5}{4}\pi}\sqrt{2}}}$

(5) $\boldsymbol{f(0)}=e^{-0}\sin 0=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{f(2\pi)}=e^{-2\pi}\sin 2\pi=\boldsymbol{0}$

(6) (1)から(5)までの結果より $f(x)$ の増減は

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{5}{4}\pi$	$\cdots$	2π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}}$	↘	$-\frac{1}{e^{\frac{5}{4}\pi}\sqrt{2}}$	↗	0

［B］ (1)　$f'(x)=\frac{2x\cdot(x-1)-(x^2+3)\cdot 1}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}=\boldsymbol{\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}}$

(2)　$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}>0 \iff (x-3)(x+1)>0$ かつ $x-1\neq 0$ より

$x<-1,\ x>3$

(3)　$f'(x)=\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}=0 \iff (x-3)(x+1)=0$ かつ $x-1\neq 0$ より **$x=-1,\ 3$**

(4)　**$f(-1)=\frac{(-1)^2+3}{-1-1}=-2$，$f(3)=\frac{3^2+3}{3-1}=6$**

(5)　$f(x)=x\cdot\frac{1+\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$ より **$\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$，$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$**

(6)　$\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$，$\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$，$\lim_{x\to 1-0}(x^2+3)=\lim_{x\to 1+0}(x^2+3)=4$ より

$\lim_{x\to 1-0}f(x)=-\infty$，$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\infty$

(7)　(1)から(6)までの結果より $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty/\infty$	↘	6	↗	∞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第14講　グラフの描き方

14

［A］ $f(x)=x^2e^{-x}$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け．ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{e^x}=0$ は証明せずに用いてよい．

［B］ $f(x)=x\sqrt{9-x^2}$ $(0\leqq x\leqq 3)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け．

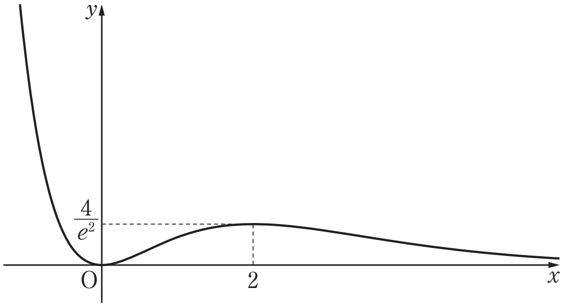
【答】 ［A］略　［B］略

【解説】 ［A］ $f'(x)=2x\times e^{-x}+x^2\times e^{-x}\cdot(-x)'=x(2-x)e^{-x}$ であり，

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$，$f(0)=0$，$f(2)=\dfrac{4}{e^2}$，$\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	∞	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	0

となるので，グラフは下図．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

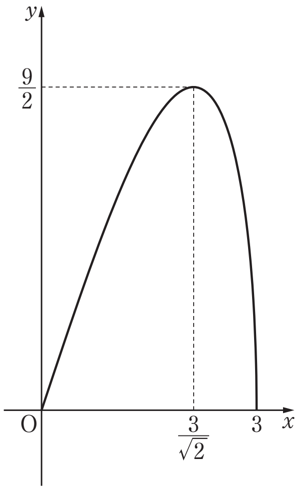
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］　$f'(x)=1\times\sqrt{9-x^2}+x\times\dfrac{1}{2\sqrt{9-x^2}}\cdot(9-x^2)'=\dfrac{9-2x^2}{\sqrt{9-x^2}}$ であり，

$f(0)=f(3)=0$，$f\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{9}{2}$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f'(x)=3$，$\displaystyle\lim_{x\to3-0}f'(x)=-\infty$ より $f(x)$ の増減は

x	0	…	$\dfrac{3}{\sqrt{2}}$	…	3
$f'(x)$	(3)	＋	0	－	$(-\infty)$
$f(x)$	0	↗	$\dfrac{9}{2}$	↘	0

となるので，グラフは下図．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 15 講　グラフを詳しく描く為の道具

15

［A］ $f(x)=\dfrac{x^2+x+2}{x-1}$ とする．$y=f(x)$ の凹凸，漸近線などを調べ，$y=f(x)$ のグラフを描け．

［B］ $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ $(x>0)$ とする．$y=f(x)$ の変曲点などを調べ，$y=f(x)$ のグラフを描け．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x^2}=0$ は証明せずに用いてよい．

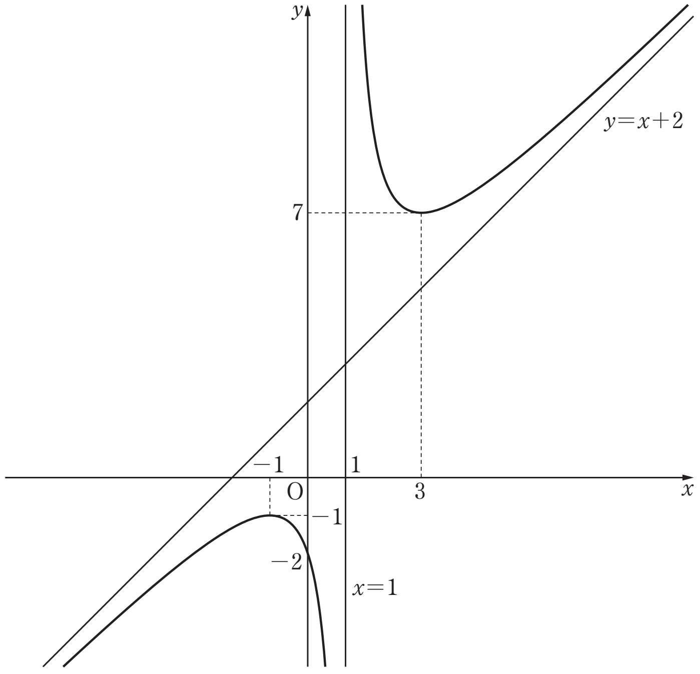
【答】 ［A］略 ［B］略

【解説】 ［A］ $f(x)=x+2+\dfrac{4}{x-1}$ より $y=f(x)$ の漸近線は $y=x+2$ と $x=1$ であり，

$f'(x)=1-\dfrac{4}{(x-1)^2}$ より $f''(x)=\dfrac{8}{(x-1)^3}$ となる．また $f'(x)=\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$ などより $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	×	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	×	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty/\infty$	↘	7	↗	∞

となるので，グラフは下図．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

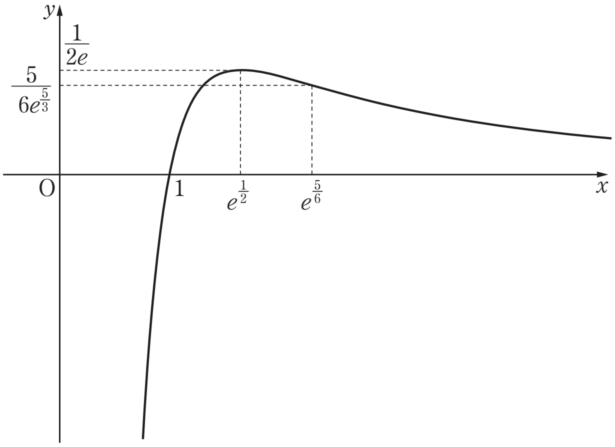
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ $f(x)=x^{-2}\log x$ より $f'(x)=-2x^{-3}\log x+x^{-2}\cdot\dfrac{1}{x}=x^{-3}(1-2\log x)$,

$f''(x)=-3x^{-4}(1-2\log x)+x^{-3}\cdot\dfrac{-2}{x}=x^{-4}(6\log x-5)$ であることなどより $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1}{2}}$	$\cdots$	$e^{\frac{5}{6}}$	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$-$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{2e}$	↘	$\dfrac{5}{6e^{\frac{5}{3}}}$	↘	0

となるので，グラフは下図.



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 16 講　最大と最小

16

［A］ $f(\theta)=3\sin\theta+\sin 3\theta$ とする.

$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f(\theta)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.

［B］ $f(x)=\sqrt{x^2+1}-\dfrac{1}{2}x$ とする.

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値と最小値をそれぞれ求めよ.

【答】 ［A］最大値は $2\sqrt{2}$，最小値は 0　［B］最大値は $\sqrt{5}-1$，最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

【解説】 ［A］ $f(\theta)=3\sin\theta+\sin 3\theta$ より

$$\frac{d}{d\theta}f(\theta)=3\cos\theta+3\cos 3\theta$$
$$=3\cos\theta+3(4\cos^3\theta-3\cos\theta)$$
$$=12\cos\theta\left(\cos\theta-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

であるので，$0\leqq\theta\leqq\pi$ における $f(\theta)$ の増減は

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(\theta)$		＋	0	－	0	＋	0	－	
$f(\theta)$		↗		↘		↗		↘	

となる.

ここで $f(\theta)$ の**最大値は**

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=f\left(\frac{3}{4}\pi\right)=3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{2\sqrt{2}}$$

また $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$，$f(0)=f(\pi)=0$ より **最小値は** $f(0)=f(\pi)=\mathbf{0}$

［B］ $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{2x-\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}}=\dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^2+1}\,(2x+\sqrt{x^2+1})}$ より，

$0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		－	0	＋	
$f(x)$	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	$\sqrt{5}-1$

となる.

ここで $(\sqrt{5}-1)-1=\sqrt{5}-2>0$ より $f(x)$ の**最大値は** $f(2)=\mathbf{\sqrt{5}-1}$，**最小値は**

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\mathbf{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 17 講　実数解の個数

17

［A］ kを実数の定数とするとき，x の方程式

$$x^3+x^2-kx-(k+4)=0$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

［B］ aを実数の定数とするとき，x の方程式

$$x+1=ae^x$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

ただし，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ は証明せずに用いてもよい．

【答】 ［A］ $\begin{cases}1 & (k<8\text{ のとき})\\ 2 & (k=8\text{ のとき})\\ 3 & (k>8\text{ のとき})\end{cases}$　［B］ $\begin{cases}0 & (a>1\text{ のとき})\\ 1 & (a\leqq 0,\ a=1\text{ のとき})\\ 2 & (0<a<1\text{ のとき})\end{cases}$

【解説】 ［A］ $f(x)=x^3+x^2-kx-(k+4)$ とおくと，

$f(-1)=-1+1+k-k-4=-4\neq 0$ より $f(x)=0$ は $x=-1$ を解にもたないことがわかる．

よって $f(x)=0$ は $x^3+x^2-4=k(x+1)$ つまり $\dfrac{x^3+x^2-4}{x+1}=k$ と考えることができる．

ここで　$g(x)=\dfrac{x^3+x^2-4}{x+1}$ とおくと，$g(x)=x^2-\dfrac{4}{x+1}$ より

$g'(x)=2x+\dfrac{4}{(x+1)^2}=\dfrac{2(x+2)(x^2+1)}{(x+1)^2}$ となるので，$g(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	0	$+$	$\times$	$+$	
$g(x)$	∞	↘	8	↗	$\infty/-\infty$	↗	∞

となる．よって求める個数は $\begin{cases}\mathbf{1} & (\boldsymbol{k}<8\text{ のとき})\\ \mathbf{2} & (\boldsymbol{k}=8\text{ のとき})\\ \mathbf{3} & (\boldsymbol{k}>8\text{ のとき})\end{cases}$

［B］ $x+1=ae^x \iff (x+1)e^{-x}=a$ なので $f(x)=(x+1)e^{-x}$ とおくと，

$f'(x)=-xe^{-x}$ であり，$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\dfrac{x}{e^x}\cdot\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=0$ などより $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↘	0

となる．

よって求める個数は $\begin{cases}\mathbf{0} & (\boldsymbol{a}>1\text{ のとき})\\ \mathbf{1} & (\boldsymbol{a}\leqq 0,\ \boldsymbol{a}=1\text{ のとき})\\ \mathbf{2} & (0<\boldsymbol{a}<1\text{ のとき})\end{cases}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 18 講　接線について

18

［A］ 次の各問いに答えよ.

(1) 曲線 $y=\sin x$ の $x=\dfrac{\pi}{3}$ における接線の方程式を求めよ.

(2) 曲線 $y=\log x$ の $x=1$ における接線の方程式を求めよ.

(3) 曲線 $y=e^x$ 上の点 $(t,\ e^t)$ における接線と x 軸の交点の座標を求めよ.

［B］ 曲線 $y=xe^{-x}$ の接線で点 $\left(0,\ \dfrac{4}{e^2}\right)$ を通るものは何本あるか求めよ.

【答】 ［A］ (1) $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3\sqrt{3}-\pi}{6}$ (2) $y=x-1$ (3) $(t-1,\ 0)$ ［B］2 本

【解説】 ［A］ (1) $y=\sin x$ より $y'=\cos x$ なので $x=\dfrac{\pi}{3}$ における接線の傾きは

$\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$.

また $x=\dfrac{\pi}{3}$ のとき $y=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ なので，求める接線の方程式は

$$y=\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}\qquad\therefore\quad \boldsymbol{y=\frac{1}{2}x+\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}}$$

(2) $y=\log x$ より $y'=\dfrac{1}{x}$ なので $x=1$ における接線の傾きは $\dfrac{1}{1}=1$.

また $x=1$ のとき $y=\log 1=0$ なので，求める接線の方程式は

$$y=1(x-1)+0\qquad\therefore\quad \boldsymbol{y=x-1}$$

(3) $y=e^x$ より $y'=e^x$ なので $x=t$ における接線の傾きは e^t.

また $x=t$ のとき $y=e^t$ なので，$x=t$ における接線の方程式は

$$y=e^t(x-t)+e^t\qquad\therefore\quad y=e^tx+(1-t)e^t$$

ここで $y=0$ を代入すると

$$0=e^tx+(1-t)e^t \iff -e^tx=(1-t)e^t\qquad\therefore\quad x=t-1$$

よって求める交点の座標は $\boldsymbol{(t-1,\ 0)}$

［B］ $y=xe^{-x}$ より $y'=(1-x)e^{-x}$ となるので，$x=t$ における接線の方程式は

$$y=(1-t)e^{-t}(x-t)+te^{-t}\qquad\therefore\quad y=(1-t)e^{-t}x+t^2e^{-t}$$

この直線が点 $\left(0,\ \dfrac{4}{e^2}\right)$ を通るとき

$$\frac{4}{e^2}=(1-t)e^{-t}\cdot 0+t^2e^{-t}\qquad\therefore\quad \frac{4}{e^2}=t^2e^{-t}$$

が成り立つ.

ここで $f(t)=t^2e^{-t}$ とおくと，$f'(t)=t(2-t)e^{-t}$ などより $f(t)$ の増減は

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

t	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$	∞	↘	0	↗	$\dfrac{4}{e^2}$	↘	

となるので，$f(t)=\dfrac{4}{e^2}$ となる異なる実数解の個数は 2．よって求める接線は **2 本**である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 19 講　積分の基本

19

［A］ 不定積分を求めよ．ただし，積分定数には C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int\frac{x+\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx$

(2) $\displaystyle\int(\sin 2x+\cos 3x)dx$

(3) $\displaystyle\int(e^x+1)^2dx$

(4) $\displaystyle\int(2x+1)^{10}dx$

(5) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx$

［B］ 定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1\frac{2x}{x^2+1}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin 3x\cos 2x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_1^2(x-1)^4(x+1)dx$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx$

【答】 ［A］ (1) $\tan x+\log|x|+C$　(2) $-\dfrac{1}{2}\cos 2x+\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$

(3) $\dfrac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C$　(4) $\dfrac{1}{22}(2x+1)^{11}+C$　(5) $\log\left|\dfrac{x+1}{x+2}\right|+C$

［B］ (1) $\log 2$　(2) $\dfrac{6}{5}$　(3) $\dfrac{17}{30}$　(4) $\dfrac{\pi}{2}$

【解説】 ［A］ (1) $\displaystyle\int\frac{x+\cos^2 x}{x\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{x}\right)dx=\boldsymbol{\tan x+\log|x|+C}$

(2) $\displaystyle\int(\sin 2x+\cos 3x)dx=\boldsymbol{-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+C}$

(3) $\displaystyle\int(e^x+1)^2dx=\int(e^{2x}+2e^x+1)dx=\boldsymbol{\frac{1}{2}e^{2x}+2e^x+x+C}$

(4) $\displaystyle\int(2x+1)^{10}dx=\frac{1}{11}(2x+1)^{11}\cdot\frac{1}{2}+C=\boldsymbol{\frac{1}{22}(2x+1)^{11}+C}$

(5) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)(x+2)}dx=\int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx=\log|x+1|-\log|x+2|+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{\log\left|\frac{x+1}{x+2}\right|+C}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}dx=\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1=\mathbf{log\,2}$

(2) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin 3x\cos 2x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{\sin 5x+\sin x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}\cos 5x-\cos x\right)\right]_0^{\pi}=\mathbf{\frac{6}{5}}$

(3) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)^4(x+1)\,dx=\int_1^2\{(x-1)^5+2(x-1)^4\}\,dx=\left[\frac{1}{6}(x-1)^6+\frac{2}{5}(x-1)^5\right]_1^2$

$\displaystyle=\frac{1}{6}+\frac{2}{5}=\mathbf{\frac{17}{30}}$

(4) $\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 2x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 4x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{4}\sin 4x\right)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 20 講　部分積分

20

［A］ 不定積分を求めよ．ただし，積分定数は C を用いよ．

(1) $\displaystyle\int xe^x\,dx$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx$

(3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx$

(4) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx$

［B］ 定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 3x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 (x+1)e^x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi} (x+\sin x)^2\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^e \log x\,dx$

【答】 ［A］ (1) $(x-1)e^x+C$　(2) $-x\cos x+\sin x+C$　(3) $x\sin x+\cos x+C$

(4) $\dfrac{x^3}{9}(3\log x-1)+C$

［B］ (1) $-\dfrac{1}{9}$　(2) e　(3) $\dfrac{1}{3}\pi^3+\dfrac{5}{2}\pi$　(4) 1

【解説】 ［A］ (1) $\displaystyle\int xe^x\,dx=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C=\boldsymbol{(x-1)e^x+C}$

(2) $\displaystyle\int x\sin x\,dx=x(-\cos x)-\int(-\cos x)dx=\boldsymbol{-x\cos x+\sin x+C}$

(3) $\displaystyle\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=\boldsymbol{x\sin x+\cos x+C}$

(4) $\displaystyle\int x^2\log x\,dx=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx=\frac{x^3}{3}\log x-\int\frac{x^2}{3}\,dx=\frac{x^3}{3}\log x-\frac{x^3}{9}+C$

$\displaystyle=\boldsymbol{\frac{x^3}{9}(3\log x-1)+C}$

［B］ 以下 C を積分定数とする．

(1) $\displaystyle\int x\sin 3x\,dx=x\cdot\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)-\int\left(-\frac{1}{3}\cos 3x\right)dx=-\frac{1}{3}x\cos 3x+\frac{1}{9}\sin 3x+C$

$\displaystyle=\frac{1}{9}(-3x\cos 3x+\sin 3x)+C$ より

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 3x\,dx=\left[\frac{1}{9}(-3x\cos 3x+\sin 3x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{-\frac{1}{9}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(2) $\displaystyle\int(x+1)e^x\,dx=(x+1)e^x-\int e^x\,dx=(x+1)e^x-e^x+C=xe^x+C$ より

$\displaystyle\int_0^1(x+1)e^x\,dx=\Big[xe^x\Big]_0^1=\boldsymbol{e}$

(3) $\displaystyle\int 2x\sin x\,dx=2x(-\cos x)-\int 2(-\cos x)\,dx=-2x\cos x+2\sin x+C,$

$\displaystyle\int\sin^2 x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C$ より

$\displaystyle\int_0^{\pi}(x+\sin x)^2\,dx=\int_0^{\pi}(x^2+2x\sin x+\sin^2 x)\,dx$

$\displaystyle=\left[\frac{x^3}{3}-2x\cos x+2\sin x+\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi^3+\frac{5}{2}\pi}$

(4) $\displaystyle\int\log x\,dx=x\log x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,dx=x\log x-x+C=x(\log x-1)+C$ より

$\displaystyle\int_1^e\log x\,dx=\Big[x(\log x-1)\Big]_1^e=\boldsymbol{1}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　置換積分

21

［A］　定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx$

(2) $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}dx$

(4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx$

(5) $\displaystyle\int_1^e \frac{\log x}{x}dx$

［B］　定積分を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx$

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{4-x^2}\,dx$

(4) $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}dx$

【答】　［A］ (1) 1　(2) $2e(e-1)$　(3) $5+3\log 2$　(4) $\log\dfrac{e+1}{2}$　(5) $\dfrac{1}{2}$

［B］ (1) $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{e}{2}$　(2) $\dfrac{1}{4}$　(3) $\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$　(4) $\dfrac{\pi}{8}$

【解説】　［A］ (1)　$x^2=t$ と置換すると，$2x=\dfrac{dt}{dx}$ より $x\,dx=\dfrac{1}{2}dt$ であり，

$\begin{cases} x=\sqrt{\pi} \text{ のとき } t=\pi \\ x=0 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$　なので

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin x^2\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin t\,dt=\left[-\frac{1}{2}\cos t\right]_0^{\pi}=\mathbf{1}$$

(2)　$\dfrac{1}{\sqrt{x}}=t$ と置換すると，$-\dfrac{1}{2x\sqrt{x}}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{x\sqrt{x}}dx=-2dt$ であり，

$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } t=1 \\ x=\dfrac{1}{4} \text{ のとき } t=2 \end{cases}$　なので

$$\int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{x\sqrt{x}}e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}dx=\int_2^1(-2e^t)dt=\Big[-2e^t\Big]_2^1=\mathbf{2e(e-1)}$$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$x+1=t$ と置換すると，$1=\dfrac{dt}{dx}$ より $dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } t=2 \\ x=0 \text{ のとき } t=1 \end{cases}$ なので

$$\int_0^1 \frac{(x+2)^3}{(x+1)^2}dx=\int_1^2 \frac{(t+1)^3}{t^2}dt=\int_1^2\left(t+3+\frac{3}{t}+\frac{1}{t^2}\right)dt=\left[\frac{t^2}{2}+3t+3\log|t|-\frac{1}{t}\right]_1^2$$

$$=\mathbf{5+3\log 2}$$

(4)　$(e^x+1)'=e^x$ より $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx=\Big[\log(e^x+1)\Big]_0^1=\mathbf{\log\frac{e+1}{2}}$

(5)　$\log x=t$ と置換すると，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{x}dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=e \text{ のとき } t=1 \\ x=1 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$ なので

$$\int_1^e \frac{\log x}{x}dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{2}}$$

［B］(1)　$\tan x=t$ と置換すると，$\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{4} \text{ のとき } t=1 \\ x=0 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$ なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx=\int_0^1 t\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}\quad \text{である．}$$

よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\cdot\tan^2 x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\,dx=\frac{1}{2}+\Big[\log|\cos x|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\mathbf{\frac{1}{2}\log\frac{e}{2}}$$

(2)　$\sin x=t$ と置換すると，$\cos x=\dfrac{dt}{dx}$ より $\cos x\,dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=\dfrac{\pi}{2} \text{ のとき } t=1 \\ x=0 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$ なので

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\cos x\,dx=\int_0^1 t^3dt=\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{4}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　$x=2\sin\theta$ と置換すると，$\dfrac{dx}{d\theta}=2\cos\theta$ より $dx=2\cos\theta\,d\theta$ であり，

$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } \theta=\dfrac{\pi}{6} \\ x=0 \text{ のとき } \theta=0 \end{cases}$　なので

$$\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2|\cos\theta|\cdot 2\cos\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{6}}4\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\Big[2\theta+\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

(4)　$x=2\tan\theta$ と置換すると，$\dfrac{dx}{d\theta}=\dfrac{2}{\cos^2\theta}$ より $dx=\dfrac{2}{\cos^2\theta}d\theta$ であり，

$\begin{cases} x=2 \text{ のとき } \theta=\dfrac{\pi}{4} \\ x=0 \text{ のとき } \theta=0 \end{cases}$　なので

$$\int_0^2\frac{1}{4+x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4(1+\tan^2\theta)}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\,d\theta=\Big[\frac{1}{2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi}{8}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　面積

22

［A］ 2つの曲線 $y=\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=\sin 2x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ により囲まれる部分の面積 S を求めよ．

［B］ C：$y=\log x$ とする．$x=e^3$ における C の接線を l とするとき，C と l，x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積 S を求めよ．

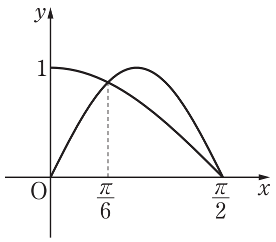
【答】 ［A］ $\dfrac{1}{4}$　［B］ $\dfrac{e^3-2}{2}$

【解説】 ［A］ 2つの曲線の共有点の x 座標は

$$\sin 2x=\cos x \iff \cos x(2\sin x-1)=0 \qquad \therefore\ x=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}$$

これらと2つの曲線の位置関係より

$$S=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-\cos x)\,dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}=\boldsymbol{\frac{1}{4}}$$

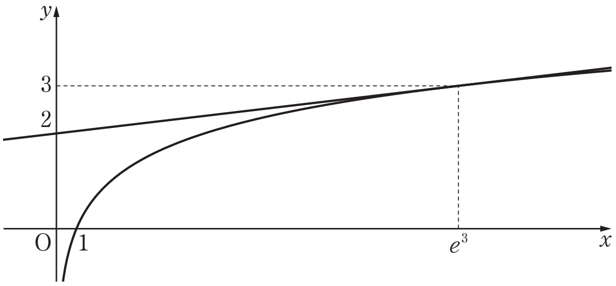


［B］ $y=\log x$ より $y'=\dfrac{1}{x}$ となるので $x=e^3$ における接線の方程式は

$$y=\frac{1}{e^3}(x-e^3)+\log e^3 \qquad \therefore\ y=\frac{1}{e^3}x+2$$

よって

$$S=\frac{(2+3)\times e^3}{2}-\int_1^{e^3}\log x\,dx=\frac{5}{2}e^3-\Big[x(\log x-1)\Big]_1^{e^3}=\boldsymbol{\frac{e^3-2}{2}}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　体積（回転体のみ）

23

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $y=x^2-2x$ と x 軸によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) $y=\tan x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$ と x 軸によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(3) $y=\log x$ と x 軸，y 軸，そして直線 $y=2$ によって囲まれる部分を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

［B］ 次の各問いに答えよ．

(1) 2つの曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=\sin 2x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ によって囲まれる部分を，x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

(2) $C：y=\log x$ とする．$x=e$ における C の接線を l とするとき，C と l，x 軸によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $\dfrac{16}{15}\pi$　(2) $\dfrac{\pi(4-\pi)}{4}$　(3) $\dfrac{e^4-1}{2}\pi$

［B］ (1) $\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\pi$　(2) $\dfrac{2\pi(3-e)}{3}$

【解説】 ［A］ (1) $x^2-2x=x(x-2)=0$　$\therefore$　$x=0,\ 2$ より求める体積は

$$\int_0^2\pi(x^2-2x)^2dx=\int_0^2\pi(x^4-4x^3+4x^2)dx=\pi\left[\frac{1}{5}x^5-x^4+\frac{4}{3}x^3\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{16}{15}\pi}$$

(2) 求める体積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi(\tan x)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=\pi\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{\pi(4-\pi)}{4}}$$

(3) $y=\log x$ $\iff$ $x=e^y$ なので求める体積は

$$\int_0^2\pi(e^y)^2dy=\int_0^2\pi e^{2y}dy=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2y}\right]_0^2=\boldsymbol{\frac{e^4-1}{2}\pi}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

［B］ (1) $\sin 2x = \sin x \iff \sin x(2\cos x - 1) = 0$

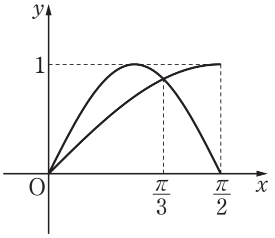
$\therefore$ $x = 0,\ \dfrac{\pi}{3}$ なので，求める体積は

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi(\sin 2x)^2 dx - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi(\sin x)^2 dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi(\sin^2 2x - \sin^2 x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi\left(\frac{1-\cos 4x}{2} - \frac{1-\cos 2x}{2}\right)dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \pi \cdot \frac{\cos 2x - \cos 4x}{2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{16}\pi}$$



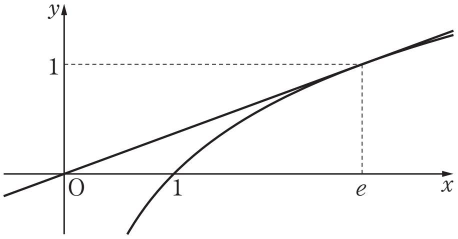
(2) $y = \log x$ より $y' = \dfrac{1}{x}$ となるので $x = e$ における接線の方程式は

$$y = \frac{1}{e}(x - e) + \log e \qquad \therefore \quad y = \frac{1}{e}x$$

よって求める体積は

$$\frac{1}{3} \times 1^2\pi \times e - \int_1^e \pi(\log x)^2 dx = \frac{e\pi}{3} - \pi\Big[x(\log x)^2 - 2x\log x + 2x\Big]_1^e = \frac{e\pi}{3} - \pi(e-2)$$

$$= \boldsymbol{\frac{2\pi(3-e)}{3}}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 24 講　積分で表された関数

24

［A］ 次の各問いに答えよ．

(1) $f(x)=x+\int_0^1 e^t f(t)dt$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) $\int_a^x f(t)dt=\sin x$ を満たす関数 $f(x)$ と定数 a の値を求めよ．ただし，$3<a<4$ とする．

［B］ $f(x)=\int_x^{2x}\log t\,dt\ (x>0)$ とするとき，以下の各問いに答えよ．

(1) $f'(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ を最小にする x の値を求めよ．

【答】 ［A］ (1) $f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}$　(2) $f(x)=\cos x$，$a=\pi$

［B］ (1) $\log 4x$　(2) $\dfrac{1}{4}$

【解説】 ［A］ (1) 定数 k を用いて $\int_0^1 e^t f(t)dt=k$ とおくことができるので，$f(x)=x+k$ と表せる．

このとき

$$k=\int_0^1 e^t f(t)dt=\int_0^1 e^t(t+k)dt=\Big[(t+k-1)e^t\Big]_0^1$$
$$=(e-1)k+1$$

より $k=-\dfrac{1}{e-2}$ を得る．よって $\boldsymbol{f(x)=x-\dfrac{1}{e-2}}$

(2) $\int_a^x f(t)dt=\sin x$ の両辺を x で微分して $f(x)=\cos x$ を得る．

また $\int_a^x f(t)dt=\sin x$ の両辺に $x=a$ を代入して $0=\sin a$．これと $3<a<4$ より $a=\pi$

以上より，$\boldsymbol{f(x)=\cos x}$，$\boldsymbol{a=\pi}$

［B］ (1) $f'(x)=\left(\int_x^{2x}\log t\,dt\right)'=\left\{\log(2x)\right\}\cdot(2x)'-(\log x)\cdot(x)'=2\log 2x-\log x$

$=\boldsymbol{\log 4x}$

(2) $f'(x)=\log 4x$ より $f(x)$ の増減は

x	0	…	$\frac{1}{4}$	…	∞
$f'(x)$		−	0	＋	
$f(x)$		↘		↗	

となるので，$f(x)$ を最小にする x の値は $x=\boldsymbol{\dfrac{1}{4}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第１講　複素数の取り扱い

1　$z^2=5+12i$ を満たす複素数 z を求めよ．

【答】　$z=\pm(3+2i)$

【解説】　p と q を実数として $z=p+qi$ とおくと，$z^2=(p+qi)^2=(p^2-q^2)+2pqi$ となるので，

$$z^2=5+12i \iff (p^2-q^2)+2pqi=5+12i$$

である．

ここで p，q は実数なので，p^2-q^2 と $2pq$ も実数となるので

$$p^2-q^2=5 \quad \cdots\cdots①,\ 2pq=12 \quad \cdots\cdots②$$

が成り立つ．

②より $pq=6(\neq 0)$ より $p\neq 0$ だから，② $\iff$ $q=\dfrac{6}{p}$ とできるので，これを①に代入すると

$$\begin{aligned} ① &\iff p^2-\frac{36}{p^2}=5 \\ &\iff p^4-5p^2-36=0 \\ &\iff (p^2+4)(p-3)(p+3)=0 \end{aligned}$$

p は実数なので，$p=\pm 3$．

$p=3$ のとき，$q=2$，$p=-3$ のとき，$q=-2$ だから，求める複素数は $\boldsymbol{z=\pm(3+2i)}$．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第２講　$\boldsymbol{n}$ 乗計算

2　$z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ とするとき $1+z^{100}+z^{200}$ の値を求めよ.

【答】　0

【解説】　$z=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$ より

$z^{100}=\cos\dfrac{100}{6}\pi+i\sin\dfrac{100}{6}\pi=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$,

$z^{200}=\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)^2=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi$ となるので

$$\begin{aligned}1+z^{100}+z^{200}&=1+\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)+\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)\\&=\mathbf{0}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第３講　複素数で点を移動

3　正の実数 a，b に対して $z=a+bi$ とする．
O(0)，A$(3-i)$，B(z) が正三角形の頂点となるとき z を求めよ．

【答】 $z=\dfrac{3+\sqrt{3}+(-1+3\sqrt{3})i}{2}$

【解説】 OA＝OB かつ $\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ なので，

$$z=(3-i)\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=(3-i)\times\frac{1+\sqrt{3}\,i}{2}=\frac{3+\sqrt{3}+(-1+3\sqrt{3})i}{2},$$

または $z=(3-i)\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}=(3-i)\times\dfrac{1-\sqrt{3}\,i}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}-(1+3\sqrt{3})i}{2}$

となるが，実部と虚部がともに正なので，求める複素数は $\boldsymbol{z=\dfrac{3+\sqrt{3}+(-1+3\sqrt{3})i}{2}}$

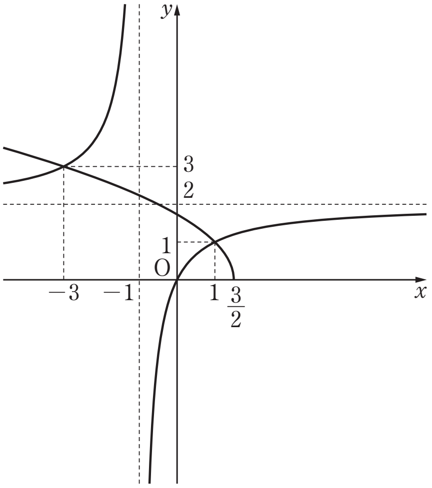
©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第４講　分数関数・無理関数

4　方程式 $\sqrt{3-2x}=\dfrac{2x}{x+1}$ を解け.

【答】 $x=-3,\ 1$

【解説】 $y=\sqrt{3-2x}$ と $y=\dfrac{2x}{x+1}=2-\dfrac{2}{x+1}$ のグラフより交点の x 座標は $x=-3,\ 1$



求める x は $\boldsymbol{x=-3,\ 1}$

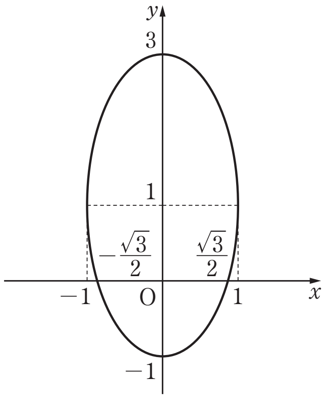
ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第５講　２次曲線

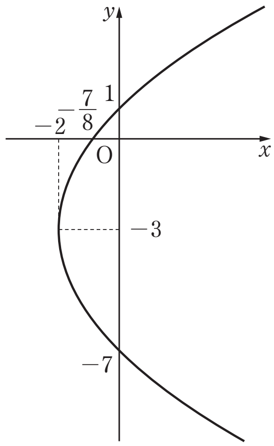
> **5**　次の２次曲線を図示せよ.
> (1)　$4x^2+y^2-2y-3=0$
> (2)　$y^2-8x+6y-7=0$
> (3)　$x^2-4y^2-6x-16y-32=0$

【答】　略

【解説】　(1)　$4x^2+y^2-2y-3=0 \iff x^2+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ で焦点は$(0,\ 1\pm\sqrt{3})$などより



(2)　$y^2-8x+6y-7=0 \iff (y+3)^2=4\cdot2(x+2)$で焦点は$(0,-3)$，準線は$x=-4$などより



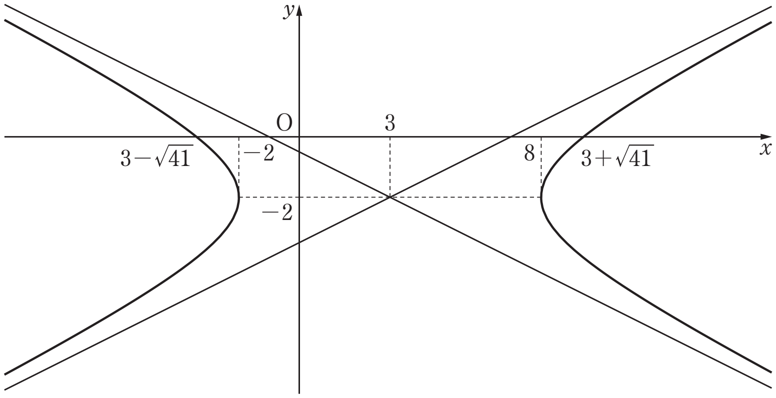
(3)　$x^2-4y^2-6x-16y-32=0 \iff \dfrac{(x-3)^2}{25}-\dfrac{4(y+2)^2}{25}=1$ で焦点は

$\left(3\pm\dfrac{5\sqrt{5}}{2},\ -2\right)$,

漸近線は $y=\pm\dfrac{1}{2}(x-3)-2$ などより

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第6講　数列の極限

6	極限 $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+5}-n)$ を求めよ.

【答】 2

【解説】

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+5}-n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^2+4n+5}+n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\dfrac{5}{n}}{\sqrt{1+\dfrac{4}{n}+\dfrac{5}{n^2}}+1}\\ &= \mathbf{2}\end{aligned}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　級数

7　半径１の円をC_1とする．円C_1に内接する正方形をQ_1，Q_1の内接円をC_2とし，以下，自然数nに対して，円C_nに内接する正方形をQ_n，Q_nの内接円をC_{n+1}と定めることとする．

円C_nの面積をS_nとするとき，$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$を求めよ．

【答】　2π

【解説】　半径Rの円に内接する正方形の一辺の長さをaとすると，正方形の対角線の長さ$\sqrt{2}\,a$が円の直径$2R$に等しいので$\sqrt{2}\,a=2R$つまり$R=\frac{\sqrt{2}}{2}a$を得る．

次に，その正方形に内接する円の半径をrとすると円の直径$2r$が正方形の一辺の長さになるので$a=2r$を得る．

よって$R=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2r$より$r=\frac{1}{\sqrt{2}}R$となる．

ここでC_1の半径は１なので，C_nの半径は，初項１，公比$\frac{1}{\sqrt{2}}$の等比数列の一般項で$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$となる．

ゆえに$S_n=\pi\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right\}^2=\frac{\pi}{2^{n-1}}$となるが，$\{S_n\}$は初項$\pi$，公比$\frac{1}{2}$の等比数列となり，$-1<\frac{1}{2}<1$なので

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n=\frac{\pi}{1-\frac{1}{2}}=\boldsymbol{2\pi}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第８講　関数の極限 ―その１―

8　次の極限を求めよ．

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2}{x-1}$

(4)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)$

【答】　(1)　$\dfrac{2}{3}$　　(2)　1　　(3)　極限無し　　(4)　$-\dfrac{1}{2}$

【解説】　(1)　$\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}=\boldsymbol{1}$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{2}{x-1}=-\infty,\ \lim_{x\to1+0}\frac{2}{x-1}=\infty$ より $\displaystyle\lim_{x\to1}\frac{2}{x-1}$ は**極限無し**.

(4)　$x=-t$ とおくと，$x\to-\infty$ のとき $t\to\infty$ なので

$$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x+1}+x)=\lim_{t\to\infty}(\sqrt{t^2-t+1}-t)=\lim_{t\to\infty}\frac{-t+1}{\sqrt{t^2-t+1}+t}$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{-1+\dfrac{1}{t}}{\sqrt{1-\dfrac{1}{t}+\dfrac{1}{t^2}}+1}=\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第9講　関数の極限 ―その2―

9　次の極限を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)}{x}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}$

【答】 (1) e^3　(2) e^3　(3) 5　(4) -1　(5) 6　(6) 2

【解説】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left\{(1+3x)^{\frac{1}{3x}}\right\}^3=\boldsymbol{e^3}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to -\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right\}^3=\boldsymbol{e^3}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+5x)}{5x}\times 5=\mathbf{5}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}\times(-1)=\mathbf{-1}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}\times 6=\mathbf{6}$

(6) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=\lim_{x\to 0}2\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\mathbf{2}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第10講　関数の極限 ―その3―

10　次の極限を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ は用いてもよいこととする．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{e^x}{x-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{e^x}{x-1}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{e^x}$

【答】 (1) ∞　　(2) $-\infty$　　(3) 0

【解説】 (1) $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1+0}e^x=e$ より $\displaystyle\lim_{x\to1+0}\frac{e^x}{x-1}=\lim_{x\to1+0}\frac{1}{x-1}\cdot e^x=\infty$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to1-0}e^x=e$ より $\displaystyle\lim_{x\to1-0}\frac{e^x}{x-1}=\lim_{x\to1-0}\frac{1}{x-1}\cdot e^x=-\infty$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}\cdot\left(1-\frac{1}{x}\right)=\mathbf{0}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　微分の基本

11　$f'(x)$ を求めよ．

（1）　$f(x)=e^x\cos x$

（2）　$f(x)=\dfrac{x^2}{\log x}$

【答】（1）　$\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$　　（2）　$\dfrac{x(2\log x-1)}{(\log x)^2}$

【解説】（1）　$f'(x)=e^x\cos x+e^x(-\sin x)=e^x(\cos x-\sin x)=\boldsymbol{\sqrt{2}\,e^x\sin\left(x+\dfrac{3}{4}\pi\right)}$

（2）　$f'(x)=\dfrac{2x\cdot\log x-x^2\cdot\dfrac{1}{x}}{(\log x)^2}=\boldsymbol{\dfrac{x(2\log x-1)}{(\log x)^2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 12 講　微分の計算

12　$f'(x)$ を求めよ．

（1）　$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$

（2）　$f(x)=e^{-2x}\sin 2x$

【答】（1）　$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$　　（2）　$2\sqrt{2}\,e^{-2x}\sin\left(2x+\dfrac{3}{4}\pi\right)$

【解説】（1）　$f(x)=\log(x+\sqrt{x^2-1})$

$$f'(x)=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot(x+\sqrt{x^2-1})'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\left\{1+\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\cdot(x^2-1)'\right\}$$

$$=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

（2）　$f'(x)=e^{-2x}\cdot(-2x)'\times\sin 2x+e^{-2x}\times(\cos 2x)\cdot(2x)'=2e^{-2x}(-\sin 2x+\cos 2x)$

$$=\boldsymbol{2\sqrt{2}\,e^{-2x}\sin\left(2x+\frac{3}{4}\pi\right)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第13講　増減表の作成方法

13　$f(x)=\dfrac{-x+1}{(x-2)^3}$ の増減表を作成せよ．

【答】 略

【解説】 $f(x)=(-x+1)(x-2)^{-3}$ より

$f'(x)=-1\cdot(x-2)^{-3}+(-x+1)\cdot(-3)(x-2)^{-4}=\dfrac{2x-1}{(x-2)^4}$ なので，

$f'(x)>0$ となる x の値の範囲は $\dfrac{1}{2}<x<2$，$x>2$ となり，$f'(x)=0$ となる x の値は $x=\dfrac{1}{2}$ である．

また $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{2}+1}{\left(\dfrac{1}{2}-2\right)^3}=-\dfrac{4}{27}$ であり，

$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{-1+\dfrac{1}{x}}{\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^3}$ より　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ となり，

また　$\displaystyle\lim_{x\to2-0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to2+0}f(x)=-\infty$ より $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\times$	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{4}{27}$	↗	$\infty/-\infty$	↗	0

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 14 講　グラフの描き方

14　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ $(x>0)$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフを描け．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は証明せずに用いてよい．

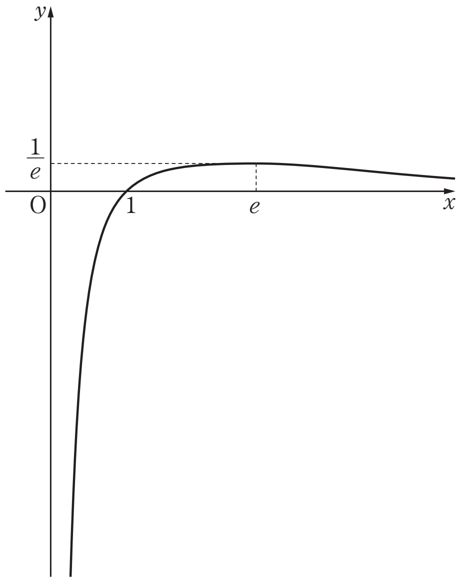
【答】　略

【解説】　$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{x}\cdot x-(\log x)\cdot 1}{x^2}=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ であり，

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=-\infty$，$f(e)=\dfrac{1}{e}$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より $f(x)$ の増減は

x	0		e		∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{1}{e}$	↘	0

となるので，グラフは下図．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第15講　グラフを詳しく描く為の道具

15 $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$ とする．$y=f(x)$ の凹凸，漸近線などを調べ，$y=f(x)$ のグラフを描け．

【答】 略

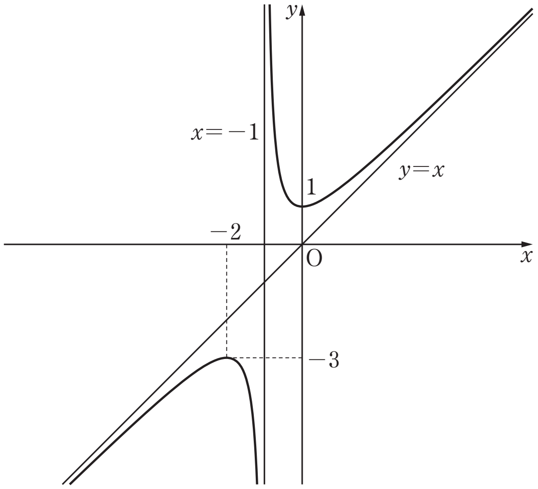
【解説】 $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$ より $y=f(x)$ の漸近線は $y=x$ と $x=-1$ であり，

$f'(x)=1-\dfrac{1}{(x+1)^2}$ より $f''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}$ となる．また $f'(x)=\dfrac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ などより

$f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$f''(x)$		$-$	$-$	$-$	$\times$	$+$	$+$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-3	↘	$-\infty/\infty$	↘	1	↗	∞

となるので，グラフは下図．



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第16講　最大と最小

> 16　$f(x)=x^2-4\log(x^2+2x+2)$ とするとき，$f(x)$ の最小値を求めよ.

【答】 $2-4\log(4+2\sqrt{2})$　$(x=\sqrt{2})$

【解 説】 $f'(x)=2x-4\cdot\dfrac{1}{x^2+2x+2}\cdot(x^2+2x+2)'=2x-\dfrac{8(x+1)}{x^2+2x+2}=\dfrac{2(x+2)(x^2-2)}{x^2+2x+2}$

なので $f(x)$ の増減は

x	$-\infty$	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$4-4\log 2$	↗		↘	$2-4\log(4+2\sqrt{2})$	↗	

となる.

ここで $(4-4\log 2)-\{2-4\log(4+2\sqrt{2})\}=2+4\log(2+\sqrt{2})>0$ より 最小値は

$f(\sqrt{2})=\mathbf{2-4\log(4+2\sqrt{2})}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第17講　実数解の個数

17　a を実数の定数とするとき，x の方程式

$$\log x = a\sqrt{x}\ (x>0)$$

の異なる実数解の個数を求めよ．

ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ は証明せずに用いてもよい．

【答】 $\begin{cases} 0 & \left(a>\dfrac{2}{e}\text{のとき}\right) \\ 1 & \left(a\leqq 0,\ a=\dfrac{2}{e}\text{のとき}\right) \\ 2 & \left(0<a<\dfrac{2}{e}\text{のとき}\right) \end{cases}$

【解説】 $\log x = a\sqrt{x} \iff \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}=a$ より $f(x)=\dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-(\log x)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{2-\log x}{2x\sqrt{x}}$$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}2\times\frac{\log\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=0$

などより $f(x)$ の増減は

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\dfrac{2}{e}$	↘	0

となるので，実数解の個数は $\begin{cases} \mathbf{0} & \left(\boldsymbol{a>\dfrac{2}{e}}\ \textbf{のとき}\right) \\ \mathbf{1} & \left(\boldsymbol{a\leqq 0,\ a=\dfrac{2}{e}}\ \textbf{のとき}\right) \\ \mathbf{2} & \left(\boldsymbol{0<a<\dfrac{2}{e}}\ \textbf{のとき}\right) \end{cases}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 18 講　接線について

18　曲線 $y=\dfrac{e^x}{x}$ の接線で点 (0, 0) を通るものをすべて求めよ.

【答】 $y=\dfrac{e^2}{4}x$

【解説】 $y=\dfrac{e^x}{x}$ より $y'=\dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$ となるので，$x=t(\neq 0)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{(t-1)e^t}{t^2}(x-t)+\frac{e^t}{t} \qquad \therefore \quad y=\frac{(t-1)e^t}{t^2}x+\frac{(2-t)e^t}{t}$$

この直線が点(0, 0)を通るとき

$$0=\frac{(t-1)e^t}{t^2}\cdot 0+\frac{(2-t)e^t}{t} \qquad \therefore \quad t=2$$

よって求める接線の方程式は

$$y=\frac{(2-1)e^2}{2^2}x \qquad \therefore \quad \boldsymbol{y=\frac{e^2}{4}x}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第19講　積分の基本

19　定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2dx$

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}\cos^2 4x\,dx$

(4) $\displaystyle\int_1^2\frac{(x^2+1)^2}{x}dx$

(5) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan x}dx$

【答】 (1) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$　(2) $\dfrac{e^4+4e^2-1}{2e^2}$　(3) $\dfrac{\pi}{2}$　(4) $\dfrac{27}{4}+\log 2$　(5) $\dfrac{1}{2}\log 3$

【解説】 (1) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan x+\frac{1}{\tan x}\right)^2dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\tan^2 x+\frac{1}{\tan^2 x}+2\right)dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{\tan x}+\tan x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}=\boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{3}}}$$

(2) $$\int_0^1\left(e^x+\frac{1}{e^x}\right)^2dx=\int_0^1(e^{2x}+e^{-2x}+2)dx=\left[\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}e^{-2x}+2x\right]_0^1=\boldsymbol{\frac{e^4+4e^2-1}{2e^2}}$$

(3) $$\int_0^{\pi}\cos^2 4x\,dx=\int_0^{\pi}\frac{1+\cos 8x}{2}dx=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{8}\sin 8x\right)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$$

(4) $$\int_1^2\frac{(x^2+1)^2}{x}dx=\int_1^2\left(x^3+2x+\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{4}x^4+x^2+\log|x|\right]_1^2=\boldsymbol{\frac{27}{4}+\log 2}$$

(5) $$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan x}dx=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\Big[\log|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\log 3}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第20講　部分積分

20　定積分$\displaystyle\int_0^{\pi}(x+\cos x)^2\,dx$を求めよ．

【答】　$\dfrac{1}{3}\pi^3+\dfrac{1}{2}\pi-4$

【解説】　C_1，C_2を積分定数とすると

$$\int 2x\cos x\,dx=2x\sin x-\int 2\sin x\,dx=2x\sin x+2\cos x+C_1,$$

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C_2$$ より

$$\int_0^{\pi}(x+\cos x)^2dx=\int_0^{\pi}(x^2+2x\cos x+\cos^2 x)\,dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}+2x\sin x+2\cos x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)\right]_0^{\pi}=\boldsymbol{\frac{1}{3}\pi^3+\frac{1}{2}\pi-4}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第21講　置換積分

21 定積分を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx$

(2) $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

【答】 (1) $\dfrac{1}{3}$　(2) $\dfrac{8-3\sqrt{3}}{3}$

【解説】 (1) $\log x=t$ と置換すると，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{dt}{dx}$ より $\dfrac{1}{x}dx=dt$ であり，

$\begin{cases} x=e \text{ のとき } t=1 \\ x=1 \text{ のとき } t=0 \end{cases}$ なので

$$\int_1^e \frac{(\log x)^2}{x}dx=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\mathbf{\frac{1}{3}}$$

(2) $4-x^2=t$ と置換すると，$-2x=\dfrac{dt}{dx}$ より $x\,dx=-\dfrac{1}{2}dt$ であり，

$\begin{cases} x=1 \text{ のとき } t=3 \\ x=0 \text{ のとき } t=4 \end{cases}$ なので

$$\int_0^1 x\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_4^3\left(-\frac{1}{2}\sqrt{t}\right)dt=\int_3^4\frac{1}{2}\sqrt{t}\,dt=\left[\frac{1}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_3^4=\mathbf{\frac{8-3\sqrt{3}}{3}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　面積

22　$C: y=e^x$ とする．$x=2$ における C の接線を l とするとき，C と l，x 軸，y 軸によって囲まれる部分の面積 S を求めよ．

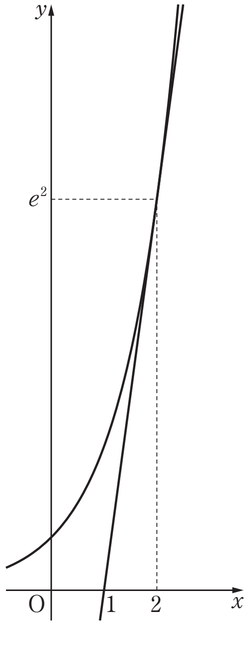
【答】 $\dfrac{e^2-2}{2}$

【解説】 $y=e^x$ より $y'=e^x$ となるので $x=2$ における接線の方程式は

$$y=e^2(x-2)+e^2 \qquad \therefore \quad y=e^2x-e^2$$

よって

$$S=\int_0^2 e^x dx-\frac{1\times e^2}{2}=\Big[e^x\Big]_0^2-\frac{e^2}{2}=\boldsymbol{\frac{e^2-2}{2}}$$



ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第23講　体積（回転体のみ）

23　$C: y=e^x$ とする．$x=1$ における C の接線を l とするとき，C と l と y 軸によって囲まれる部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ．

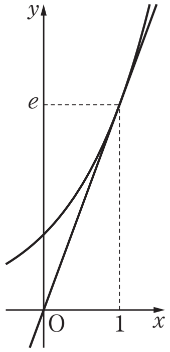
【答】　$\dfrac{\pi(e^2-3)}{6}$

【解説】　$y=e^x$ より $y'=e^x$ となるので $x=1$ における接線の方程式は

$$y=e(x-1)+e \qquad \therefore \quad y=ex$$

よって求める体積は

$$\int_0^1 \pi(e^x)^2 dx-\frac{1}{3}\times e^2\pi\times 1=\pi\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1-\frac{e^2\pi}{3}=\frac{\pi(e^2-1)}{2}-\frac{e^2\pi}{3}=\boldsymbol{\frac{\pi(e^2-3)}{6}}$$



©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第24講　積分で表された関数

24　a を 0 でない実数の定数とする．

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 + x\int_0^1 e^t f(t)dt$$

を満たす関数 $f(x)$ と a の値を求めよ．

【答】 $f(x)=2x-\dfrac{2}{e-2}$，$a=\dfrac{2}{e-2}$

【解説】 定数 k を用いて $\int_0^1 e^t f(t)dt = k$ とおくことができるので，与式は

$$\int_a^x f(t)dt = x^2 + kx$$

となる．

両辺を x で微分して $f(x)=2x+k$ を得る．

また，両辺に $x=a$ を代入することで $0=a^2+ka \iff 0=a(a+k)$ となるが，$a\neq 0$ より $a=-k$ である．

このとき

$$\begin{aligned} k &= \int_0^1 e^t f(t)dt = \int_0^1 e^t(2t+k)dt = \Big[(2t+k-2)e^t\Big]_0^1 \\ &= (e-1)k+2 \end{aligned}$$

より $k=-\dfrac{2}{e-2}$ を得るので，$\boldsymbol{f(x)=2x-\dfrac{2}{e-2}}$，$\boldsymbol{a=\dfrac{2}{e-2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。